PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA 7

1. Se analizó una muestra de 12 piezas de pan blanco de cierta marca y se determinó el porcentaje de carbohidratos contenido en cada una de las piezas, obteniéndose los siguientes valores:

76.93	76.88	77.07	76.68	76.39	75.09	77.67	76.88	78.15	76.50	77.16	76.42

a) Estimar el promedio del porcentaje de carbohidratos contenido en las piezas de pan de esta marca.

b) Estimar la mediana del porcentaje de carbohidratos.

c) Estimar la proporción de piezas de pan de esta marca cuyo contenido de carbohidratos no excede el 76.5%.

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Obtener los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de

a) μ y σ^2.

b) μ, siendo $\sigma^2 = \sigma_0^2$ conocida.

c) σ^2, siendo $\mu = \mu_0$ conocida.

3. a) Una máquina envasa caramelos, siendo el peso neto (en gramos) de cada bolsa una v.a. con distribución normal. Los siguientes datos corresponden al peso de 15 bolsas elegidas al azar:

210	197	187	217	194	208	220	199	193	203	181	212	188	196	185

Hallar los EMV de la media y la varianza del peso neto.

b) Con cierto instrumento se realizan 20 mediciones de una magnitud física μ. Cada observación es de la forma $X = \mu + \epsilon$, donde ϵ es el error de medición (aleatorio). Se obtuvieron los siguientes datos:

25.11	25.02	25.16	24.98	24.83	25.05	24.94	25.04	24.99	24.96
25.03	24.97	24.93	25.12	25.01	25.12	24.90	24.98	25.10	24.96

Suponiendo que los errores de medición tienen distribución normal con media cero y varianza 0.01, estimar μ. ¿Cuál es la varianza del estimador de μ?

c) Para controlar la precisión de un sistema de medición se mide 24 veces una magnitud conocida $\mu_0 = 12$, obteniéndose los siguientes valores

12.51	11.66	11.91	12.25	11.54	11.36	12.40	12.19	12.88	12.16	12.69	12.91
12.12	11.02	12.53	11.77	12.72	10.56	11.52	11.66	12.25	12.09	11.48	12.36

Estimar la precisión (es decir, la varianza del error de medición), suponiendo que los errores están normalmente distribuídos con media cero.

4. Consideremos muestras aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ para cada una de las siguientes distribuciones:

i) exponencial de parámetro θ.

ii) Poisson de parámetro θ.

iii) con densidad

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{[0,1]}(x), \quad 0 < \theta < 1.$$

iv) geométrica de parámetro θ.

a) Encontrar en cada caso el estimador de máxima verosimilitud y el de momentos de θ.

b) En los dos primeros casos, y para el estimador de máxima verosimilitud del tercero, decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados.

c) Decir si los estimadores obtenidos son consistentes. Justificar.

5. a) Se sabe que el tiempo de duración de una clase de lámparas tiene distribución $\mathcal{E}(\theta)$. Se han probado 20 lámparas, obteniéndose los siguientes tiempos de duración (en días):

45 53 50 61 39 40 45 47 38 53 54 60 34 46 34 50 42 60 62 50

Estimar el tiempo esperado de la duración de una lámpara.

b) Durante 20 días se ha registrado el número de llamadas en una central telefónica, obteniéndose los siguientes valores:

35 41 38 40 34 36 41 48 42 39 57 41 35 37 38 41 43 44 46 47

Suponiendo que el número de llamadas diarias sigue una distribución $\mathcal{P}(\theta)$, estimar el promedio diario de llamadas.

c) Se sabe que la longitud de los ejes que fabrica un establecimiento siderúrgico tiene densidad

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{[0,1]}(x).$$

Se eligen al azar 20 ejes, cuyas longitudes son:

0.5	0.7	0.8	0.95	0.9	0.6	0.2	0.85	0.3	0.2
0.76	0.55	0.48	0.8	0.76	0.13	0.15	0.67	0.9	0.95

Estimar el valor del parámetro θ.

d) Un estado tiene varios distritos. Supongamos que cada distrito tiene igual proporción θ de personas que están a favor de una propuesta de control de armas. En cada uno de 8 distritos elegidos al azar, se cuenta la cantidad de personas que hay que encuestar hasta encontrar alguna de acuerdo con la propuesta (llamemos X a esta cantidad). Los resultados son: 3, 8, 9, 6, 4, 5, 3, 2 (i.e.: en el primer distrito las dos primeras personas encuestadas estaban en contra y la tercera a favor). Basándose en estos datos, calcular el EMV de $P_\theta(X \geq 5)$.

6. Sea $X_1, \dots X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{U}[0, \theta]$.

   a) Probar que $T = \max_{1 \le i \le n} X_i$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   b) Calcular el estimador de θ basado en el primer momento.

   c) Decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados, y consistentes. Justificar.

7. Sea $X_1, \dots X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Rayleigh, cuya densidad está dada por

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} I_{[0,\infty)}(x).$$

   a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   b) Decir si el estimador obtenido es insesgado o asintóticamente insesgado, y consistente. Justificar.
   (SUGERENCIA: Hallar la distribución de la v.a. X^2).

8. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

   a) Probar que $T = \min_{1 \le i \le n} X_i$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   b) Calcular el estimador de θ basado en el primer momento.

   c) Decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados, y consistentes. Justificar.

9. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2.

   a) Probar que $\bar{X}^2$ no es un estimador insesgado de μ^2. ¿Es asintóticamente insesgado?¿Es consistente?

   b) ¿Para qué valores de k es $\widehat{\mu^2} = (\bar{X}^2 - ks^2)$ un estimador insesgado de μ^2?

10. Se define el *error cuadrático medio* de un estimador $\hat{\theta}$ como

$$\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

   a) Verificar que $\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \left(\mathrm{sesgo}(\hat{\theta})\right)^2$, donde $\mathrm{sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

   b) ¿Cuánto vale $\mathrm{ECM}(\hat{\theta})$ si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ?

   c) Consideremos un estimador de la varianza de la forma $\hat{\sigma}^2 = ks^2$, siendo s^2 la varianza muestral. Hallar el valor de k que minimiza $\mathrm{ECM}(\hat{\sigma}^2)$.
   (SUGERENCIA: Usar que $E(s^4) = \dfrac{n+1}{n-1}\sigma^4$).

11. En el Ejercicio 6, calcular el ECM de los estimadores calculados en (a) y (b) y compararlos. En función de esta comparación, ¿cuál de los dos estimadores usaría?

12. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución de Bernoulli de parámetro p y sea $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Consideremos el nuevo parámetro $\theta = p\,(1-p)$.

   a) Mostrar que $T_n\,(n - T_n)\,/\,(n(n-1))$ es un estimador insesgado de θ.
   b) Hallar el EMV de θ.
   c) Mostrar que el EMV de θ es sesgado, pero asintóticamente insesgado.
   d) Mostrar que el estimador insesgado dado tiene mayor varianza que el EMV para θ. Observar que se puede resolver este ítem sin necesidad de calcular la $V\,(T_n\,(n - T_n))$.

13. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$ y sea $Y_1, \ldots, Y_m$ otra muestra aleatoria independiente de la anterior con $E(Y_i) = \mu$ y $V(Y_i) = 4\sigma^2$.

   a) Mostrar que para todo $\delta \in (0,1)$, el estimador $\hat{\mu} = \delta\bar{X} + (1-\delta)\bar{Y}$ es un estimador insesgado de μ.
   b) Para valores fijos de n y m, calcular el ECM del estimador propuesto en a).
   b) Hallar el valor de δ que minimiza el ECM.

1

1.

75.09 76.39 76.42 76.50 76.68 76.88

76.88 76.93 77.07 77.16 77.67 78.15

a) $\bar{x} = 76.82$

b) 76.88

c) 33.33 %

2. $X_1, \dots, X_n$ ma $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

a)

$$L(\mu, \sigma) = f_{X_1}(x_1, \mu, \sigma) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n, \mu, \sigma)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\ln(L(\mu, \sigma)) = n\ln(1) - n\ln(\sqrt{2\pi}) - n\ln(\sigma)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \mu} = -\cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sigma^2}\cancel{(-2)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

$$\hat{\mu}_{MV} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n} = \bar{X}_n$$

$$\frac{\partial \ln(L(\mu,\sigma))}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{1}{2}(-2)\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$\sigma^3 \neq 0$

$$-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\widehat{\sigma^2}_{MV} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{n}$$

b) $\hat{\mu}_{MV} = \bar{x}_n$

c) $\widehat{\sigma^2}_{MV} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{n}$

2

3.

181 185 187 188 193 194 196 197 199

203 208 210 212 217 220

a) $\hat{\mu}_{MV} = \frac{598}{3} = \bar{x}_{15}, \quad \widehat{\sigma^2_{MV}} = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x}_{15})^2}{15} = \frac{\sum_{i=1}^{15} \left(x_i - \frac{598}{3}\right)^2}{15}$

b) $X \sim N(\mu, 0.01)$

$\overline{X_{24}}$

$Var\left(\overline{X_{24}}\right) = \frac{0.01}{24}$

c) $X = 12 + \epsilon \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$

$X \sim N(12, \sigma^2)$

$$\frac{\sum_{i=1}^{24} (X_i - 12)}{24}$$

4.

a)

i) · Máx Verosimilitud

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} I_{(0,+\infty)}(x_i)$$

$$= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} I_{(0,+\infty)}(x_i)$$

$$\ln(L(\theta)) = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\ln'(L(\theta)) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

· Momentos

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

$$\frac{1}{\theta_M} = \overline{X}_n$$

$$\hat{\theta}_M = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

③

ii) • MV

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta}$$

$$= e^{-\theta n} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

$$\ln(L(\theta)) = -n\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln\theta - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\ln'(L(\theta)) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 0$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \overline{X}_n$$

• M

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\hat{\theta}_M = \overline{X}_n$$

iii) • MV

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{[0,1]}(x_i)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{[0,1]}(x_i)$$

$$\ln(L(\theta)) = -n \ln\theta + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}\right)$$

$$= -n \ln\theta + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\ln'(L(\theta)) = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

$$\boxed{\theta^2 \neq 0)} - n\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}$$

• M

$$E(X) = \int_0^1 x \frac{1}{\theta} x^{\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)} dx$$

$$= \left[\frac{1}{\cancel{\theta}} \frac{x^{\frac{1}{\theta}+1}}{\frac{1+\theta}{\cancel{\theta}}}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\theta}$$

4

$$\frac{1}{1+\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

$$1+\theta = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

$$\hat{\theta}_M = \frac{1-\overline{X}_n}{\overline{X}_n}$$

iv) • MV

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta (1-\theta)^{x_i - 1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}$$

$$\ln(L(\theta)) = n \ln\theta + \sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) \ln(1-\theta)$$

$$\ln'(L(\theta)) = \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}{1-\theta} = 0$$

$$n - \theta n = \theta \sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)$$

$$n = \theta\left(n + \sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)\right)$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)} = \frac{n}{\cancel{n} + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \cancel{n}}$$

$$= \frac{1}{\overline{X}_n}$$

• M

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\frac{1}{\theta} = \bar{X}_n$$

$$\hat{\theta}_M = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

3) i)

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) = n\,E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad Y \sim \Gamma(n, \theta)$$

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{y} \frac{n^{\theta}\, y^{n-1}\, e^{-\theta y}}{\Gamma(n)}\, dy$$

$$= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)}\,\theta \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{y^{(n-1)-1}\, \theta^{n-1}\, e^{-\theta y}}{\Gamma(n-1)}\, dy}_{\text{1 per } \Gamma(n-1, \theta)}$$

$$= \frac{\cancel{\Gamma(n-1)}}{(n-1)\cancel{\Gamma(n-1)}}\,\theta = \frac{\theta}{n-1}$$

5

$$E(\hat\theta) = \frac{n}{n-1}\theta$$

$\hat\theta_M = \hat\theta_{MV}$ no es insesgado pero si asintóticamente insesgado

i) $E(\hat\theta_M) = E(\overline{X}_n) = \theta$

$\hat\theta_M \underset{\hat\theta_{MV}}{\overset{\uparrow}{=}}$

$\hat\theta_M = \hat\theta_{MV}$ insesgagado $\Rightarrow$ asint insesgado

iii) $E(\hat\theta_{MV}) = E\left(-\frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n}\right) = -\frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i\right)$ ⊛

$Y = \ln X$, X con densidad $\frac{1}{\theta} x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{[0,1]}(x)$, $0<\theta<1$

$F_Y(y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y)$

$= F_X(e^y)$

$f_Y(y) = \frac{1}{\theta}(e^y)^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)} I_{[0,1]}(e^y)\, e^y$

$= \frac{1}{\theta} e^{\frac{1}{\theta}y} I_{[-\infty,0]}(y)$

$E(\ln x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{t}{\theta} e^{\frac{t}{\theta}}\, dt = -\theta$

⊛ $= -\frac{1}{n} E(n E(\ln x_i)) = -\frac{1}{n} n(-\theta) = \theta$ $\hat\theta_{MV}$ insesgado y asint insesgado c)

$$\text{i)}\ Var\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right) = Var\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = n^2\, Var\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \quad E\left(\frac{1}{T^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f_T(t)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^n t^{(n-2)-1} e^{-\theta t}}{\Gamma(n)}\, dt$$

$$= \theta^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{n-2} t^{(n-2)-1} e^{-\theta t}}{\Gamma(n-2)}\, dt}_{\overset{\shortparallel}{1} \text{ por } \Gamma(n-2,\theta)}$$

$$= \theta^2 \frac{\Gamma(n-2)}{(n-1)\Gamma(n-1)} = \frac{\theta^2 \cancel{\Gamma(n-2)}}{(n-1)(n-2)\cancel{\Gamma(n-2)}}$$

$$n^2\, Var\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right) = n^2\left(\frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2}\theta^2\right)$$

$$= \theta^2\left[\frac{n^2(n-1) - n^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \hat{\theta}_M = \frac{1}{\overline{X}_n} \text{ son consistentes}$$

6

ii) + $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}_n) = \theta$

++ $Var(\bar{X}_n) = \dfrac{\theta}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

+, ++ $\Rightarrow$ $\hat{\theta}$ es consistente

iii) $\hat{\theta}_M = \dfrac{1}{\bar{X}_n} - 1$

Por LGN $\quad \bar{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1) = \dfrac{1}{1+\theta} \quad 0<\theta<1$

$\dfrac{1}{1+\theta} \neq 0 \qquad \dfrac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow{P} 1+\theta$

$\dfrac{1}{\bar{X}_n} - 1 \xrightarrow{P} \cancel{1}+\theta-\cancel{1} = \theta$

$\hat{\theta}_M$ es consistente

$$\hat{\theta}_{MV} = -\frac{\sum_{i=1} \ln x_i}{n}$$

- $\hat{\theta}_{MV}$ es asint. insesgado

•• $Var(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{n} Var(\ln x_1)$

$Y = \ln X$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{0} y^2 \frac{1}{\theta} e^{\frac{y}{\theta}} dy$$

$u = y^2 \quad du = 2y$

$dv = \frac{1}{\theta} e^{\frac{y}{\theta}} \quad v = e^{\frac{y}{\theta}}$

$$= \left[y^2 e^{\frac{y}{\theta}} \right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 2y e^{\frac{y}{\theta}} dy$$

$$= 0 - 2\theta \int_{-\infty}^{0} \frac{y}{\theta} e^{\frac{y}{\theta}} dy$$

$$= 2\theta^2$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$Var(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{n}\theta^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\hat{\theta}_{MV}$ es consistente

7

iv) $\hat{\theta}_{MV} = \hat{\theta}_{M} = \dfrac{1}{\overline{X}_n}$

LGN $\Rightarrow$ $\overline{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1) = \dfrac{1}{\theta}$

$\theta \neq 0$ $\dfrac{1}{\overline{X}_n} \xrightarrow{P} \theta$

5.

a) $\dfrac{1}{\overline{x}_{20}}$ b) $\overline{x}_{20}$ c) $\dfrac{1}{\overline{x}_{20}} - 1$, $-\dfrac{\sum_{i=1}^{20} \ln x_i}{20}$

d) $P(X \geq 5) = \cancel{1-\theta}$ ...

$p = (1-\theta)^4 \Rightarrow 1-\theta = \sqrt[4]{p}$

$\theta = 1 - \sqrt[4]{p}$

$P(X=3) = (1-\theta)^2 \, \theta$

$= \sqrt{p} \cdot (1 - \sqrt[4]{p})$

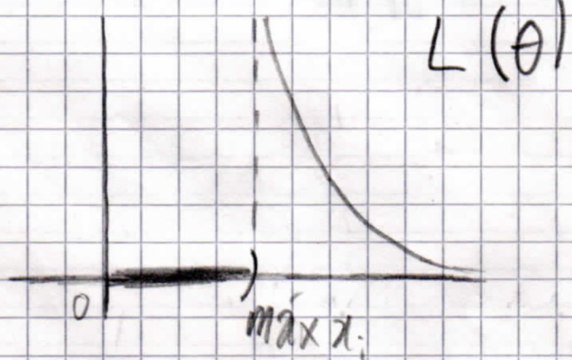
6.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \, I_{[0,\theta]}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} I_{[0,\theta]}(x_i)}_{\triangle}$$

$$\triangle = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in [0,\theta] \ \forall i \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \theta \geq \text{máx } x_i \\ 0 & \text{cc} \end{cases} = I_{[\text{máx } x_i, +\infty)}(\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \, I_{[\text{máx } x_i, +\infty)}(\theta)$$



$$\hat{\theta}_{MV} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

(8)

b) $E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$\frac{\theta}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$\widehat{\theta}_M = 2\bar{X}_n$

c) * $\widehat{\theta}_{MV}$

$E(\max_{1\le i\le n} X_i) = \frac{n}{n+1}\theta \Rightarrow \widehat{\theta}_{MV}$ no es insesgado

$Y = \max_{1\le i\le n} X_i$

$P(Y\le y) = P(X_1 \le y, \ldots, \le X_n \le y) = (P(X_1\le y))^n$

$= (F_{X_1}(y))^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n$ si $0\le y\le \theta$

$f_Y(y) = n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\, I_{[0,\theta]}(y)$

$E(Y) = \int_0^\theta y\, n\, \frac{y^{n-1}}{\theta^n}\, dy = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$

$\widehat{\theta}_{MV}$ asintóticamente insesgado

$$E(Y^2) = \int_0^\theta y^{2+1} n \frac{y^{n-1}}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{y^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$Var(Y) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

• $\hat{\theta}_{MV}$ asint insesgado

•• $Var(\hat{\theta}_{MV}) \longrightarrow 0$

•, •• $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_{MV}$ es consistente

** $\hat{\theta}_M$

• $E(2\bar{X}_n) = 2E(\bar{X}_n) = 2E(X_1) = 2\frac{\theta}{2} = \theta$

θ_M es insesgado y por ende asintóticamente insesgado

•• $V(2\bar{X}_n) = 4 Var(\bar{X}_n) = 4 \frac{Var(X_1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

•, •• $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_M$ consistente

9

7.

a)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta} e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}} \underset{[0,+\infty)}{I}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\theta}} \prod_{i=1} x_i \underset{[0,+\infty)}{I}(x_i)$$

$$\ln(L(\theta)) = -n\ln\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\ln'(L(\theta)) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\theta^2 \neq 0 \qquad -n\theta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}$$

b) $Y = X^2$

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) \overset{y>0}{=} P(|X| \leq \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\cancel{\sqrt{y}}}{\theta} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2\theta}} \frac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}} \underset{[0,+\infty)}{I}(\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{1}{2\theta} y} I_{[0,+\infty)}(y)$$

$$X^2 = Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2\theta}\right)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2\theta}$$

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}\right) = \frac{1}{2} E(X_1^2) = \frac{1}{4\theta}$$

no es insesgado ni asintoticamente insesgado

Por LGN $\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{2} E(X_1^2) = \frac{1}{4\theta}$

Luego $\hat{\theta}_{MV}$ no es consistente

8.

a) $$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{[\theta,+\infty)}(x_i)$$

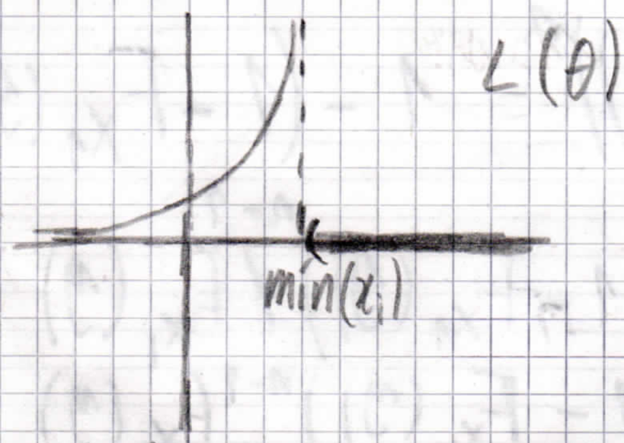
$$= e^{\theta n} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} \underbrace{I_{[\theta,+\infty)}(x_i)}_{*}$$

10

$$(*) = \begin{cases} 1 & \theta \leq x_i \quad \forall i \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \theta \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i) \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$= I_{[-\infty, \min x_i]}(\theta)$$



b) $$E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-(x-\theta)} dx$$

$$= e^{\theta} \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-x} dx = e^{\theta} \left[-e^{-x}(x+1) \right]_{\theta}^{+\infty}$$

$$= \cancel{e^{\theta}} \cancel{e^{-\theta}} (\theta + 1) = \theta + 1$$

(12)

No es consistente

estimador insesgado de σ^2

b) $E(\overline{X}^2 - KS^2) = E(\overline{X}^2) - K\,E(S^2)$

$= \sigma^2 + \mu^2 - K\sigma^2 = \sigma^2(1-K) + \mu^2$

$\boxed{K=1}$

10.

a) $ECM(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] = E\left[\left((\hat{\theta}-E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta})-\theta)\right)^2\right] = E\left[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta})-\theta) + (E(\hat{\theta})-\theta)^2\right]$

$= E\left[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2\right] + 2(E(\hat{\theta})-\theta)\underbrace{E(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))}_{0} + E\left[(E(\hat{\theta})-\theta)^2\right]$

$= E\left[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2\right] + (E(\hat{\theta})-\theta)^2$

$= Var(\hat{\theta}) + (sesgo(\hat{\theta}))^2$

b) $\hat{\theta}$ estimador insesgado

$$\Rightarrow E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$$= Var(\hat{\theta}) + (\cancel{\theta} - \cancel{\theta})^2 = Var(\hat{\theta})$$

c) $ECM(KS^2) = Var(KS^2) + (E(KS^2) - \sigma^2)^2$

$$= K^2 \, Var(S^2) + (K \, E(S^2) - \sigma^2)^2$$

$$Var(S^2) = E(S^4) - (E(S^2))^2 = \frac{n+1}{n-1}\sigma^4 - \sigma^4$$

$$= \sigma^4 \left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$= K^2 \frac{2\sigma^4}{n-1} + (\sigma^2 (K-1))^2$$

$$= K^2 \frac{2\sigma^4}{n-1} + \sigma^4 (K^2 - 2K + 1)$$

$$= \left(\frac{2\sigma^4}{n-1} + 1\right) K^2 - 2\sigma^4 K + \sigma^4$$

Derivo

$$\cancel{2}\left(\frac{2\sigma^4}{n-1} + 1\right) K - \cancel{2}\sigma^4 = 0$$

(13)

$$K = \frac{\sigma^4}{\frac{2\sigma^4+n-1}{n-1}} = \frac{\sigma^4 (n-1)}{2\sigma^4+n-1}$$

11.

$$ECM(\widehat{\theta_{MV}}) = Var(\widehat{\theta_{MV}}) - (E(\widehat{\theta_{MV}}) - \theta)^2$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta - \theta\right)^2$$

$$= \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \theta^2\left[\frac{n(n+1)^2 - n^2 - 1}{(n+1)^2(n+2)}\right] = \theta^2\left(\frac{n^3+2n^2+\cancel{1}-n^2-\cancel{1}}{(n+1)^2(n+2)}\right)$$

$$ECM(\widehat{\theta_M}) = Var(\widehat{\theta_M}) - (E(\widehat{\theta_M}) - \theta)^2$$

$$= 4\frac{Var(X_1)}{n} - (\cancel{\theta} - \cancel{\theta})^2 = \frac{\cancel{4}}{n}\frac{\theta^2}{\cancel{12}_3} = \theta^2\frac{1}{3n}$$

$\widehat{\theta_M}$ insesgado

Usaria $\widehat{\theta_M} = 2\bar{X}_n$

12. $T_n \sim Bi(n, p)$

a) $E\left(T_n(n-T_n)\frac{1}{n(n-1)}\right) = \frac{1}{n(n-1)} E\left(T_n n - T_n^2\right)$

$= \frac{1}{n(n-1)}\left(n E(T_n) - E(T_n^2)\right) = \frac{1}{n(n-1)}\left[n^2 p - \left(Var(T_n) + E(T_n)^2\right)\right]$

$= \frac{1}{n(n-1)}\left(n^2 p - np(1-p) - (np)^2\right) = \frac{\cancel{n}p}{\cancel{n}(n-1)}\left(n - (1-p) - np\right)$

$= \frac{p}{n-1}\left(n(1-p) - (1-p)\right) = \frac{p(1-p)\cancel{(n-1)}}{\cancel{n-1}} = p(1-p)$

(14)

13.

a) $E(\delta\bar{X} + (1-\delta)\bar{Y}) = \delta E(\bar{X}) + (1-\delta)E(\bar{Y})$

$= \delta\mu + (1-\delta)\mu = \mu$

b) $ECM(\hat{\mu}) = Var(\hat{\mu}) + (\underbrace{E(\hat{\mu})}_{\mu} - \mu)^2$

$= Var(\delta\bar{X} + (1-\delta)\bar{Y}) = \delta^2 Var(\bar{X}) + (1-\delta)^2 Var(\bar{Y})$

$= \delta^2 \frac{Var(X_i)}{n} + (1-\delta)^2 \frac{Var(Y_i)}{m} = \delta^2 \frac{\sigma^2}{n} + (1-\delta)^2 \frac{4\sigma^2}{m}$

c) Derivo $ECM(\hat{\mu})$

$\sigma^2 \neq 0$

$\cancel{2}\delta \frac{\cancel{\sigma^2}}{n} + \cancel{2}(\delta-1)\frac{4\cancel{\sigma^2}}{m} = 0$

$\frac{\delta}{n} - \frac{4}{m}\delta = -\frac{4}{m}$

$\delta = \frac{-\frac{4}{m}}{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)}$