1	2	3	4	Calificación
25	25	23	25	98

A

TEMA 2

Probabilidad y Estadística (C)

Primer parcial - 11/10/2022

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el nombre en cada una. Al retirarse debe firmar una hoja de asistencia.*

APELLIDO Y NOMBRES:. ... Nº DE LIBRETA: ....

)mail:. ...... FIRMA: ....

Turno: Mañana: 11 a 14 hs | Noche: 19 a 22 hs | Nº de hojas entregadas (sin enunciado): 4

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos y tener un ejercicio bien resuelto.

Definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Resolver usando al menos 4 decimales todos los pasos intermedios y entregar la respuesta redondeada en el cuarto decimal. Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (25 puntos)
   (a) (7 puntos) Sean C y D dos eventos con $P(C) = 0.36$, $P(D|C) = 0.08$ y $P(C \cup D) = 0.57$. Calcular $P(D)$. ¿Son C y D independientes? Justificar adecuadamente.
   (b) (8 puntos) Sean C y D dos eventos con $P(C|D) = P(D|C) = 0.4$ y $P(C \cup D) = 0.76$. Calcular $P(C)$.
   (c) (10 puntos) En la próxima definición por penales que realice la selección Argentina patearán los jugadores: Messi, Martínez, Di María, Otamendi y Palacios. Históricamente sus aciertos son respectivamente del 96%, 85%, 90%, 95%, 85%. En los primeros 5 tiros al arco (cada uno patea una vez solamente), calcular la probabilidad de que al menos dos de ellos no logren meter el gol. Suponer independencia entre los resultados de los distintos penales.

2. (25 puntos) En la provincia de La Pampa hay una gran población de tortugas. El 53% de las tortugas son hembras y el resto machos. La longitud (en centímetros) de una tortuga hembra se modela con una variable aleatoria Y con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.1$ y la longitud (en centímetros) de la tortuga macho se modela con la variable aleatoria continua X con función de distribución acumulada dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 12 \\ 3 - \dfrac{36}{x} & \text{si } 12 \le x \le 18 \\ 1 & \text{si } x > 18 \end{cases}$$

   (a) (7 puntos) Se elige al azar una tortuga, ¿cuál es la probabilidad de que mida entre 14 y 17 cm?
   (b) (5 puntos) Se elige al azar una tortuga que mide entre 14 y 17 cm, ¿cuál es la probabilidad de que sea hembra?
   (c) (5 puntos) Se eligen al azar (con reposición) tortugas hasta obtener la cuarta hembra, ¿cuál es la probabilidad de que esto se logre en la séptima extracción?
   (d) (8 puntos) Hallar la esperanza de $\frac{2}{X}$.

3. (25 puntos) Un juego consiste en tirar una moneda equilibrada 4 veces, siendo X la cantidad de caras obtenidas, y tirar luego tantos dados como caras se hubieran obtenido en el paso anterior. Sea Y la variable aleatoria que cuenta la cantidad de unos obtenidos.

   (a) (7 puntos) ¿Cuál es la función de probabilidad de Y condicional a que se sabe que se tiraron 2 dados?

   (b) (14 puntos) Dar el rango del vector (X, Y), hallar la función de probabilidad marginal de X y la función de probabilidad conjunta. Calcular $P(Y = 2)$.

   (c) (4 puntos) ¿Son X e Y independientes? Justificar analíticamente.

4. (25 puntos) El tiempo de duración de un experimento (en minutos) está dado por una variable aleatoria $T = 32 - 5X$, siendo $X \sim U[-2, 5]$.

   (a) (6 puntos) ¿De cuánto tiempo debe disponer la persona que va a realizar el experimento si quiere tener probabilidad al menos 0.8 de que le alcance?

   (b) (6 puntos) Se realizan tres experimentos independientes. Calcular la probabilidad de que alguno dure menos de 25 minutos.

   (c) (6 puntos) Hallar la esperanza y la varianza de T.

   (d) (7 puntos) Se realizan 50 experimentos independientes que medimos a través de variables aleatorias $T_1, \ldots, T_{50}$. Calcular la esperanza y varianza del tiempo total de duración de estos 50 experimentos.

TM | T2
HOJA 1

a)

1) $P(C) = 0{,}36$ $\quad P(C \cup D) = 0{,}57$ $\quad P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D)$

$P(D|C) = 0{,}08$ $\quad P(D) - P(C \cap D) = 0{,}21$

prob total

$\cancel{P(D) = P(D|C)\cdot P(C) + P(D|C^c)\cdot P(C^c) = 0{,}0288}$

$$P(D|C) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)}$$

$$0.08 = \frac{P(C\cap D)}{0{,}36}$$

$$P(C\cap D) = 0{,}0288$$

$$P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D)$$

$$0{,}57 = 0{,}36 + P(D) - 0{,}0288$$

$$P(D) = 0{,}2388$$

C y D son indep. si $P(C|D) = P(C)$ (Equivalente a decir $P(C\cap D) = P(C)\cdot P(D)$)

En este caso, $P(C|D) = 0{,}1206 \neq 0{,}36$

o lo que es lo mismo, $P(D|C) = 0{,}08 \neq 0{,}2388 = P(D)$

$\therefore$ NO SON INDEP

a) $P(C|D) = P(D|C) = 0{,}4$ $\quad P(C\cup D) = 0{,}76$

$P(C) + P(D) - P(C\cap D) = 0{,}76$

$$P(C|D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = 0{,}4 \rightarrow \frac{P(C\cap D)}{0{,}4} = P(D)$$

$$P(D|C) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)} = 0{,}4 \rightarrow \frac{P(C\cap D)}{0{,}4} = P(C)$$

$$\frac{5}{2}P(C\cap D) + \frac{5}{2}P(C\cap D) - P(C\cap D) = 0{,}76$$

$$4P(C\cap D) = 0{,}76$$

$$P(C\cap D) = 0{,}19$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{0{,}19}{0{,}4} = 0{,}475$$

c) $P(E_{MESSi}) = 0,96$

F_1: Fallan 1 Penal

$P(E_{MAR}) = 0,85$

$P(E_D) = 0,9$

F_2: Fallan 2 Penales

$P(E_{OT}) = 0,95$

X: Cant. de Penales fallados

$P(E_{PA}) = 0,85$

$P(F_2) = 1 - P(F_5) - P(F_4) - P(F_3) - P(F_1)$

$P(F_5) = \binom{5}{5} \cdot 0,04 \cdot 0,15 \cdot 0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,15 =$

Me Piden $P(X \geq 2) = 1 - P(X=1) - P(X=0)$

$P(X=0) = 0,96 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,593028$

$P(X=1) = 0,04 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,95 \cdot 5 + 0,96 \cdot 0,15 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,85 \cdot 5 + 0,96 \cdot 0,85 \cdot 0,1 \cdot 0,95 \cdot 0,85$

$+ 0,96 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,05 \cdot 0,85 \cdot 5 + 0,96 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,15 \cdot 5$

$=$

$P(X=1) = 0,04 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,85 + 0,96 \cdot 0,15 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,85 + 0,96 \cdot 0,85 \cdot 0,1 \cdot 0,95 \cdot 0,85$

$+ 0,96 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,05 \cdot 0,85 + 0,96 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,15 = 0,3311$

$= P(\text{Erra Messi}) \cdot P(\text{Acierta el resto}) + P(\text{Erra Mar.}) \cdot P(\text{Acierta el resto})$

$+ P(\text{Erra D}) \cdot P(\text{Acierta el resto}) + P(\text{Erra OTAM.}) \cdot P(\text{Acierta el resto})$

$+ P(\text{Erra PAL}) \cdot P(\text{Acierta el resto})$

Entonces $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0,3311 - 0,593028 \cong 0,07585$

OK

(25)

HOJA 2
TM/T2

2) 0,53 Hembras
0,47 machos

Y : Longitud (cm) de HEMBRAS

$Y \sim \mathcal{E}(1/10)$

X : Longitud de MACHOS

$X \sim f_X(x) = [F_X(x)]'$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 12 \\ 3 - \dfrac{36}{x} & \text{si } 12 \leq x \leq 18 \\ 1 & \text{si } x > 18 \end{cases}$$

a) Elijo al azar una tortuga L : Longitud de la tortuga elegida

$P(14 \leq L \leq 17) = 0,53 \cdot P(14 \leq Y \leq 17) + 0,47 \cdot P(14 \leq X \leq 17)$

$$P(14 \leq Y \leq 17) = \int_{14}^{17} f_Y(y)\,dy \underset{\text{TABLA}}{=} \int_{14}^{17} \frac{1}{10} e^{-1/10 \cdot y}\,dy = \frac{1}{10}\int_{14}^{17} e^{-y/10}$$

$$= \frac{1}{10}\left(-10 e^{-y/10}\Big|_{14}^{17}\right) \simeq 0,0639$$

$P(14 \leq X \leq 17) = F_X(17) - F_X(14) \simeq 0,4538$

$\Rightarrow P(14 \leq L \leq 17) = 0,53 \cdot 0,0639 + 0,47 \cdot 0,4538 \simeq \boxed{0,2471}$ B

b) Z = La tortuga mide entre 14 y 17 cm

$$P(H|Z) \underset{\text{BAYES}}{=} \frac{P(Z|H) \cdot P(H)}{P(Z)} = \frac{0,0639 \cdot 0,53}{0,2471} \simeq 0,1370.$$

Estos valores los saqué del otro punto

B

C) X: nº de repeticiones hasta obtener la 4ª Hembra

$X \sim BN(4, 0.53)$ → Prob. de elegir hembra

$$P(X=7) = \binom{7-1}{4-1} \cdot (0,53)^4 \cdot (1-0,53)^{7-4}$$

$$= \binom{6}{3} \cdot (0,53)^4 \cdot (0,47)^3 = 0,1638$$

B

D) ~~E(2/X)~~ $f_x(x) = [F_x(x)]' = \begin{cases} \frac{36}{x^2} & \text{si } 12 \le x \le 18 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$E(2/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2/x \cdot f_x(x)\,dx = \int_{12}^{18} \frac{72}{x^3}\,dx = 72 \int_{12}^{18} x^{-3}\,dx = 72 \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-2} \Big|_{12}^{18} \right)$$

$$= \boxed{0,1389}$$

B

HOJA 3
TM | T2

3) X: Cant. de caras obtenidas. Tiro 4 veces la moneda

Y: Cant. de unos obtenidos

a)

Prob de no sacar 1 en la 1ª tirada ↑, en la 2ª tirada ↑

$$P_{Y|X=2}(0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$R_Y = \{0, 1, 2\}$

$$P_{Y|X=2}(1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}_{\text{Al revés del otro caso}} = \frac{5}{18}$$

Prob de no sacar 1 en la 1ª — Prob. de sacar 1 en la 2ª

pedían $P(Y|X=2)$

$Y|X=2 \sim B(2, \frac{1}{6})$

$$P_{Y|X=2}(2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$P_Y(0) + P_Y(1) + P_Y(2) = 1$ ✓ como debería ser.

OK

$$\therefore P_{Y|X=2}(y) = \begin{cases} \frac{25}{36} & \text{si } y=0 \\ 5/18 & \text{si } y=1 \\ 1/36 & \text{si } y=2 \end{cases}$$ ✓

b) El rango de $(X, Y) \to \underbrace{(0 \leq X \leq 4,\ 0 \leq Y \leq X)}_{x,y \in \mathbb{N}_0}$ → la cant. de veces que puede salir el 1 depende de la cant. de tiradas y la cant. de tiradas depende de X.

Escribilo mejor al $R_{(X,Y)}$

marginal de X

$P_X(k)$:

$$P_X(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P_X(1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) = 1$ ✓

$$P_X(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

Pensé a X como $Bi(4, \underset{\text{Prob. de cara}}{1/2})$ ✓

$$P_X(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$P_X(4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$P_{XY}(x,y)$:

Y \ X	0	1	2	3	4
0	1	5/6	25/36	$\frac{125}{216}$	625/1296
1	0	1/6	5/18	25/72	$\frac{125}{324}$
2	0	0	1/36	5/72	25/216
3	0	0	0	1/216	5/324
4	0	0	0	0	1/1296

$\left[\begin{array}{l} P(\text{Sale un } 1) = 1/6 \\ P(\text{No sale } 1) = 5/6 \end{array}\right]$

✓

$P_{Y|X=3}(1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 1/6 = \frac{25}{72}$

$P_{Y|X=3}(2) = 1/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6 + 1/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 + 5/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 = 5/72$

$P_{Y|X=4}(\cancel{3}\ 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

$P_{Y|X=4}(1) = \binom{4}{1}\left(1/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6\right) \Rightarrow$ Tengo $\binom{4}{1}$ ~~formas~~ ORDENES de que me salga el 1

$P_{Y|X=4}(2) = \binom{4}{2}\left(1/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6\right) \rightarrow$ " $\binom{4}{2}$ " " "

$P_{Y|X=4}(3) = \binom{4}{3}\left(1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6\right)$ " $\binom{4}{3}$ "

✓

$P_{Y|X=4}(4) = (1/6)^4$

$P(Y=2) =$ ~~$1/36 + 5/72 + 25/216$~~

$\underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)}_{P(x=2)}\cdot\frac{1}{36} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{P(x=3)}\cdot\frac{5}{72} + \underbrace{\frac{1}{16}}_{P(x=4)}\cdot\frac{25}{216} = \frac{121}{3456}$ ✓

PROB TOTAL

c) X e Y son indep si $P_X(x)\cdot P_Y(y) = P_{XY}(x,y)$ ✓

Entonces basta con analizar un punto (x,y), por ejemplo $(3,2)$

$P_X(3)\cdot P_Y(2) = \frac{121}{13824} \neq P_{XY}(3,2) = 5/72$

Como no se cumple la igualdad $\Rightarrow$ NO SON INDEP ✓

Tambien se puede observar que como los valores de Y dependen de los de X no iba a haber INDEP.

25/

TM / T2

HOJA 4

4) $T = 32 - 5X \qquad X \sim \mathcal{U}[-2,5]$ ~~$f_X(x) = \frac{x}{7}$~~

$f_X(x) = \frac{1}{7}$

$F_X(x) \overset{\text{TABLA}}{=} \dfrac{x-(-2)}{5-(-2)} = \dfrac{x+2}{7}$

Igualmente:

$F_X(u) = \int_{-2}^{u} \underbrace{\tfrac{1}{7}}_{f_X(x)}\, dx = \frac{u}{7} + \frac{2}{7} = \frac{u+2}{7}$

a) a = Tiempo del que debe disponer

$P(T \le a) \ge 0{,}8$

$P(32 - 5X \le a) \ge 0{,}8$

$P\left(X \ge \frac{32-a}{5}\right) \ge 0{,}8$ ✓

$1 - P\left(X \le \frac{32-a}{5}\right) \ge 0{,}8$

$X \sim \mathcal{U}[-2,5] \quad 1 - F_X\left(\frac{32-a}{5}\right) \ge 0{,}8$

$1 - \dfrac{\frac{32-a}{5} + 2}{7} \ge 0{,}8$

Qué pasa si $\dfrac{32-a}{5} \notin [-2,5]$

$E(X) = \frac{3}{2}$

$V(X) = 49/12$

$0{,}2 \ge \dfrac{\frac{32-a}{5} + 2}{7}$

$-3 \ge 32 - a$

$a \ge 35$ → Debe disponer de al menos 35 min. ✓

b) $P(T \le 25) = P(32 - 5X \le 25) = P(X \ge 7/5) = 1 - P(X \le 7/5) = 1 - F_X(7/5)$

$= 1 - \dfrac{7/5 + 2}{7} = \dfrac{18}{35}$

Sea Y = Cant de los 3 experimentos con duración menor a 25 min

~~Ent~~ $Y \sim Bi(3, 18/35)$

me piden $P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{18}{35}\right)^0 \cdot \left(\frac{17}{35}\right)^3 \cong 0{,}8854$ ✓

c) $E(T) = E(32 - 5X) \underset{\text{LINEALIDAD}}{=} E(-5X) + 32 = E(X) \cdot -5 + 32 \underset{\text{TABLA}}{=} \frac{3}{2} \cdot -5 + 32 = 24{,}5$ ✓

$VAR(T) = VAR(32 - 5X) \underset{\text{PROPIEDAD}}{=} (-5)^2 \cdot VAR(X) = 25 \cdot \dfrac{[5-(-2)]^2}{12} = \dfrac{1225}{12} \cong 102{,}0833$

d) Como sé que todas las variables tienen la misma distrib. y son INDEP entonces puedo plantear

$$E\left(\sum_{i=1}^{50} T_i\right) \overset{i.i.d}{=} \sum_{i=1}^{50} E(T_i) = 50 \cdot E(T_i) = 50 \cdot 24{,}5 = 1255$$

con la varianza ocurre lo mismo. El tiempo total es $\sum_{i=1}^{50} T_i$

entonces $Var\left(\sum_{i=1}^{50} T_i\right) = \sum_{i=1}^{50} Var(T_i) = 50 \cdot Var(T_i) = 50 \cdot \frac{1225}{12} = \frac{30625}{6} \simeq 5104{,}2$

[Puedo aplicar estas Props porque $T_1, \dots, T_{50}$ son v.a i.i.d]