Final de Álgebra

22/12/2021

Ejercicio 1

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones f de A en A. Se define la relación siguiente en $\mathcal{F}$:

$$f \mathrel{\mathcal{R}} g \iff f(2) \leq g(2).$$

(a) Estudiar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

(b) Sea $f \in \mathcal{F}$ la función definida por $f(m) = r_8(7m)$ para $m \in A$. Calcular la cantidad de funciones $g \in \mathcal{F}$ que satisfacen que $f \mathrel{\mathcal{R}} g$, y también la cantidad de funciones **inyectivas** $h \in \mathcal{F}$ que satisfacen que $f \mathrel{\mathcal{R}} h$.

(a)

- ¿$\mathcal{R}$ es Reflexiva?

  Para que esto suceda, tenemos que verificar que $\forall f \in \mathcal{F}$, sucede que $f \mathrel{\mathcal{R}} f$
  $f \mathrel{\mathcal{R}} f \iff f(2) \leq f(2)$
  $f(2) = f(2) \implies f(2) \leq f(2)$, por tanto $\mathcal{R}$ es una relación **Reflexiva**.

- ¿$\mathcal{R}$ es Simétrica?

  Para que esto suceda, se tiene que cumplir que $\forall f, g \in \mathcal{F} / f \mathrel{\mathcal{R}} g \implies g \mathrel{\mathcal{R}} f$
  Sabemos por hipótesis que $f(2) \leq g(2)$, entonces suponiendo funciones $f, g \; / f(2) < g(2)$ obtendremos que $g(2) \nleq f(2)$ y por tanto como $g \not\mathcal{R} f$, $\mathcal{R}$ no es una relación **Simétrica**.

- ¿$\mathcal{R}$ es Antisimétrica?

  Para que $\mathcal{R}$ sea Antisimétrica, tendríamos que verificar que $\forall f, g \in \mathcal{F} / \; (f \mathrel{\mathcal{R}} g) \wedge (g \mathrel{\mathcal{R}} f) \implies g = f$.
  Supongamos $f(n) = n$ y $g(n) = 2$, en este caso, $f(2) \leq g(2) \wedge g(2) \leq f(2)$ ya que $2 \leq 2$, pero al ser funciones diferentes por hipótesis, la relación $\mathcal{R}$ no es **Antisimétrica**.

- ¿$\mathcal{R}$ es Transitiva?

  Por definición, $\mathcal{R}$ será transitiva si $\forall f, g, h \in \mathcal{F} / \; (f \mathrel{\mathcal{R}} g) \wedge (g \mathrel{\mathcal{R}} h) \implies (f \mathrel{\mathcal{R}} h)$.
  Por hipótesis, sabemos que $f(2) \leq g(2) \wedge g(2) \leq h(2)$, que es lo mismo que decir $f(2) \leq g(2) \leq h(2)$ y por tanto, al suceder que $f(2) \leq h(2)$, $f \mathrel{\mathcal{R}} h$ y la relación $\mathcal{R}$ es **Transitiva**.

(b)

$f(m) = r_8(7m) \equiv f(\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}) \longrightarrow \{0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$, donde cada posición del dominio está asociada a la misma posición de la imagen, por ejemplo, $f(5) = 3$.
Sabemos entonces que $f(2) = 6$ por lo que para hallar la cantidad de funciones $g \in \mathcal{F} / \; f \mathrel{\mathcal{R}} g$ necesitaremos que $6 \leq g(2)$, entonces $g(2) \in \{6, 7\}$, y todos los demás valores del dominio de g pueden ir a cualquier valor de la imagen:

- $g(2)$ tiene 2 opciones

- $g(\{0,1,3,4,5,6,7\})$ cada uno de los 7 elementos tiene 8 opciones.

$$\#g = 2 * 8^7$$

Por otro lado, para hallar la cantidad de funciones inyectivas $h \in \mathcal{F} /\ f\ \mathcal{R}\ h$, debemos pedir la condición de que $6 \leq h(2)$ y además la definición de inyectividad:

$$(\forall y \in A)\ (\exists x \in A)\ /\ h(x) = y$$

Como el valor del dominio 2 tendrá dos únicamente dos opciones de la imagen (6 ó 7), cualquiera de los 7 valores restantes del dominio tendrán 7 opciones, luego el próximo tendrá 6 opciones y así sucesivamente:

$h(2) \in \{6,7\}$ (2 opciones)
$h(0) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} - h(2)$ (7 opciones)
$h(1) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} - h(2) - h(0)$ (6 opciones)
$h(3) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} - h(2) - h(0) - h(1)$ (4 opciones)
...
h(7) $\in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} - h(2) - h(0) - h(1) - h(3) - h(4) - h(5) - h(6)$ (1 opción)

$$\#h = 2 * 7!$$

Ejercicio 2

Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 2 \pmod{28}$. Clasificar los valores que toma

$$(3a + 196^n : 2a - 196^n)$$

según los distintos valores de a, descritos en la forma $a \equiv r \pmod{m}$ para $r, m \in \mathbb{N}$ adecuados, y de $n \in \mathbb{N}$.

Sea $d = (3a + 196^n : 2a - 196^n)$, busco un término más simple para analizar d.

$$\begin{aligned}
&d \mid 3a + 196^n \\
&d \mid 2a - 196^n \\
&d \mid 3a + 196^n + (2a - 196^n) \\
&d \mid 5a \\
\\
&d \in div^+(5a) = \{1, 5, div^+(a), 5a\}
\end{aligned}$$

¿Qué tiene que pasar para que $5 \mid d$?

$$\begin{aligned}
3a + 196^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\
3a + 1^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\
3a \equiv 4 \pmod{5} &\iff \\
6a \equiv 8 \pmod{5} &\iff \\
a \equiv 3 \pmod{5}&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a - 196^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\
2a - 1^n \equiv 0 \pmod{5} &\iff \\
2a \equiv 1 \pmod{5} &\iff \\
-4a \equiv -2 \pmod{5} &\iff \\
a \equiv 3 \pmod{5}&
\end{aligned}$$

$$5 \mid d \iff a \equiv 3 \pmod{5}$$

Pero sabemos que $a \equiv 2 \pmod{28}$, por ende podemos reescribir la congruencia de a con respecto a 5 y 28 en una única módulo 25*8 de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{28} \\ a \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

$(5 : 28) = 1$, Tiene infinitas soluciones y por Teorema Chino del resto, una única solución $\pmod{140}$.

$$\begin{aligned} a \equiv 2 \pmod{28} \iff a &= 28k + 2 \\ a &\equiv 3 \pmod{5} \\ 28k + 2 &\equiv 3 \pmod{5} \\ 3k &\equiv 1 \pmod{5} \\ 6k &\equiv 2 \pmod{5} \\ k &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 28k + 2 \\ k &= 5m + 2 \\ a &= 28(5m + 2) + 2 \\ a &= 140m + 56 + 2 \\ a = 140m + 58 &\iff a \equiv 58 \pmod{140} \end{aligned}$$

$$5 \mid (3a + 196^n : 2a - 196^n) \iff a \equiv 58 \pmod{140}$$

Sabemos que si se cumple esa condición, 5 será parte del mcd.
¿Qué otros números podrían formar parte del mcd?
Como 196^n se factoriza como $7^2.2^2$, los términos del mcd pueden incluir a 7, 2, 7^2 y 2^2 si a tiene entre sus múltiplos a estos factores (ya que ambos términos incluyen a y 196^n).

$$a \equiv 2 \pmod{28} \iff$$
$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{7} \\ a \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Debido a las hipótesis dadas del enunciado, a nunca puede ser múltiplo de 7 (en consecuencia, tampoco de 7^2) ni de 4, pero si lo es de 2:

$$a \equiv 2 \pmod{4} \implies a \equiv 0 \pmod{2}$$

Al ser a siempre múltiplo de 2, sabemos que tanto $3a + 196^n$ como $2a - 196^n$ son divisibles por 2 $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 3a + 196^n &\equiv a + 0^n \equiv a \pmod{2} \\ 28k + 2 &\equiv 0k + 0 \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

$$2a - 196^n \equiv 0a - 0^n \equiv 0 \pmod{2}$$

Entonces además sabemos que $2 \mid (3a + 196^n : 2a - 196^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall a \in \mathbb{Z}$ / $a \equiv 2 \pmod{28}$

Los valores que toma $(3a + 196^n : 2a - 196^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ son:

$$\begin{aligned} 10 &\iff a \equiv 58 \pmod{140} \\ 2 &\iff a \not\equiv 58 \pmod{140} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Sea $\omega = e^{\frac{\pi}{3}i}$, y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = \omega - 1 \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{z_n}^{3n+8}\ , \ \ \forall n \geq 1.$$

Calcular z_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Empecemos calculando $z_1 = \omega - 1$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 &= \\ (\cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3})) - 1 &= \\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i - 1 &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 & = (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \\ -\frac{1}{2} & = 1\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & = 1\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}) &= \theta \\ \tfrac{2\pi}{3} &= \theta \end{aligned}$$

$$e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

Calculemos algunos valores de z_n:

$$\begin{aligned} z_2 &= \overline{z_2}^{3*1+8} \\ &= \overline{(e^{\frac{2\pi}{3}i})}^{11} \\ &= (e^{\frac{4\pi}{3}i})^{11} \\ &= e^{\frac{44\pi}{3}i\ -2k\pi} \\ &= e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \overline{z_2}^{3*2+8} \\ &= \overline{(e^{\frac{2\pi}{3}i})}^{14} \\ &= (e^{\frac{4\pi}{3}i})^{14} \\ &= e^{\frac{56\pi}{3}i\ -2k\pi} \\ &= e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= \overline{z_3}^{3*3+8} \\ &= \overline{(e^{\frac{2\pi}{3}i})}^{17} \\ &= (e^{\frac{4\pi}{3}i})^{17} \\ &= e^{\frac{68\pi}{3}i\ -2k\pi} \\ &= e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{aligned}$$

Pareciera suceder que el término general de la sucesión $z_n = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.
Pruebo por inducción:

<u>Hipótesis Inductiva</u> $\equiv z_k = e^{\frac{2\pi}{3}i}\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}\ /\ 1 \leq k < h+1$

- Caso base:

  $P(1) \equiv z_1 = \omega - 1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ya fue verificado al comienzo del ejercicio.

- Paso inductivo:

  Quiero probar que $P(h) \implies P(h+1) \iff z_h = e^{\frac{2\pi}{3}i} \implies z_{h+1} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$
  Sabemos por enunciado que $z_{h+1} = \overline{z_h}^{3h+8}$:

$$\begin{aligned} \overline{z_h}^{3h+8} &= \qquad \text{(xHI)} \\ \overline{e^{\frac{2\pi}{3}i}}^{3h+8} &= \\ (e^{\frac{4\pi}{3}i})^{3h+8} &= \\ e^{(\frac{4}{3}*3h+\frac{4}{3}*8)\pi i} &= \\ e^{(\frac{12h+32}{3})\pi i} &= \end{aligned}$$

Por propiedad, cualquier número complejo expresado en la forma $re^{\theta i}$ será igual a otro tal que su argumento difiera en $2k\pi$:

$$re^{\theta i} = re^{\theta i - 2k\pi} \text{ , } \forall k \in \mathbb{Z}$$

Por lo que podemos reducir el argumento de z_{n+1} ($\frac{12h+32}{3}\pi$) por su equivalente entre [0 y 2π), recordando que $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tfrac{12n+32}{3}\pi &= \\ \tfrac{12n+32}{3}\pi - \tfrac{6}{3}k\pi &= \quad (\text{con } k \in \mathbb{Z}) \\ \tfrac{12n+32-6k}{3}\pi & \end{aligned}$$

Como quiero obtener el argumento entre [0 y 2π), el numerador de la fracción deberá estar entre [0 y 6), por lo que puedo tomar congruencia módulo 6 para obtener los valores del argumento respecto de n:

$$12n + 32 \equiv 0n + 2 \equiv 2 \pmod 6 \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$$

Obtenemos por esta ecuación de congruencia que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\frac{12n+32}{3}\pi \equiv \frac{2}{3}\pi$, por lo tanto:

$$z_{n+1} = e^{\frac{2\pi}{3}i} \text{ , } \quad \text{como se quería probar } (z_n = z_{n+1}).$$

Ejercicio 4

(a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ **coprimos** y no nulos para los cuales el polinomio

$$X^4 + iX^3 + 2X^2 + aiX + b$$

tiene al menos una raíz **racional**.

(b) Para cada par de valores hallado, factorizar el polinomio obtenido en $\mathbb{C}[X]$.

(a)

Buscamos valores para a, b tales que el polinomio dado, tenga alguna raíz racional de la forma $\frac{c}{d}$. Al evaluar esta raíz, los términos con coeficientes imaginarios se tendrán que cancelar entre sí, y los restantes términos por ende también:

$$\begin{cases} X^4 + 2X^2 + b = 0 \\ iX^3 + aiX = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} iX^3 + aiX = 0 &\iff \\ iX(X^2 + a) = 0 &\iff \\ (X = 0) \vee (X^2 = -a) & \end{aligned}$$

En el caso en que $X = 0$, el polinomio evaluado en 0 generará que b tenga que ser 0 para que sea raíz y esto no se permite por enunciado (a, b no nulos), por lo que la condición restante es que $X^2 = -a$, es decir, a tiene que ser el negativo de un cuadrado perfecto (-1,-4,-9,-16, etc.) ya que de otro modo X no será raíz racional.

$$X^2 = -a \iff X = \pm\sqrt{-a} \quad \text{(recordando que } a \text{ es un cuadrado negativo)}$$

Con esta nueva condición, reemplazo en la primer ecuación (al ser potencias pares, es análogo usar $\sqrt{-a}$ ó $-\sqrt{-a}$):

$$\begin{aligned} X^4 + 2X^2 + b = 0 &\iff \\ (\sqrt{-a})^4 + 2(\sqrt{-a})^2 + b = 0 &\iff \\ (-a)^2 + 2(-a) + b = 0 &\iff \\ a^2 - 2a + b = 0 &\iff \\ a(a-2) = -b \end{aligned}$$

Lo que sucede en esta ecuación es que tenemos una relación entre a y b, por ejemplo, para $a = -4$, el valor de b será -24. El inconveniente es que la ecuación describe que a siempre será factor de b por lo que no se cumplirá la condición $a \perp b$, salvo para $a = -1$ donde el valor b es igual a -3.

El par $a, b = (-1, -3)$ es el único par existente con las condiciones dadas (a es un cuadrado perfecto negativo y $-b = a(a-2)$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos).

(b)

$$f(X) = X^4 + iX3 + 2X2 - iX - 3$$

Para factorizar este polinomio, recordamos la ecuación que teníamos: $X^2 - a = 0$, donde las dos raíces de esta ecuación serían $\pm(\sqrt{-a})$, por lo que con $a = -1$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_1 &= -1 \end{aligned}$$

Realizamos la división entre $f(x)$ y $X^2 - 1$ para obtener las raíces restantes:

$$\begin{array}{l|l} X^4 + iX^3 + 2X^2 - iX - 3 & \underline{X^2 - 1} \\ & X^2 + iX + 3 \end{array}$$

Para obtener las últimas dos raíces, buscamos las soluciones del polinomio $X^2 + iX + 3$.

$$X_{2,3} = \frac{-b \pm \omega^2}{2a} = \frac{-i \pm \omega^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= b^2 - 4ac = (-i)^2 - 4 * 1 * 3 = -13 \\ \omega &= i\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$X_2 = \frac{-i + i\sqrt{13}}{2} = i\frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

$$X_3 = \frac{-i - i\sqrt{13}}{2} = -i\frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

La factorización de $f(X)$ en $\mathbb{C}[X]$ en términos irreducibles es la siguiente:

$$\boxed{f(X) = (X-1)(X+1)(X - \tfrac{\sqrt{13}-1}{2}i)(X + \tfrac{\sqrt{13}+1}{2}i)}$$

Por alguna corrección o error que haya tenido: 11 6285-6924