PROMOCIONA
8 (OCHO)

1	2	3	4	Calificación
B	B.	B	B	10 (diez)

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted] NO. DE LIBRETA: [redacted]

CARRERA: CS DATOS

TURNO: Mañana A-K ☒ Mañana L-Z ☐ Noche A-K ☐ Noche L-Z ☐

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2022 - Primer recuperatorio del segundo parcial - 12/07/2022

1. Sean a, b, c enteros tales que
$$7a + 3b = 4 \qquad \text{y} \qquad 2b + 11c = 5.$$
Hallar el resto de la división de b por 77.

2. Hallar todos los $p \in \mathbb{N}$ primos tales que
$$p \mid 15^{2p-2} + 7^{p+3} + 174.$$

3. Para cada $w \in G_{11}$, calcular el valor
$$\sum_{j=0}^{64} w^j \cdot \sum_{j=0}^{64} \overline{w}^j.$$

4. Hallar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:
   - f mónico,
   - $\mathrm{gr}(f : 3X^3 - X^2 + X + 2) = 2$,
   - $(X - 3 + \sqrt{2})^2$ divide a $(f : f')$ en $\mathbb{R}[X]$,
   - f tiene al menos una raíz cuádruple.

   Determinar la factorización de f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

$\boxed{1}$ Busquemos soluciones de $7a+3b=4$ (tiene solución pues $(7:3)|4$)

Solución homogénea para $7a+3b=0$, con por ej $a_0=-3$ y $b_0=7$

Solución particular: $a_1=1$
$b_1=-1$

Solución: $(a,b)=(a_0,b_0)k+(a_1,b_1)$, $k\in\mathbb{Z}$

$(a,b)=(-3k+1,\ 7k-1)$, $k\in\mathbb{Z}$

Si $b=7k-1 \Rightarrow 2(7k-1)+11c=5$

$14k-2+11c=5$

Busco soluciones de $14k+11c=7$ (tiene solución pues $(14:11)|7$)

Solución homogénea con por ej $k_0=11$, $c_0=-14$

Solución particular: $k_1=6$
$c_1=-7$

Solución $(k,c)=(11q+6,\ -14q-7)$, $q\in\mathbb{Z}$

-1

Ahora $k=11q+6$, $q\in\mathbb{Z} \Rightarrow b=7(11q+6)=77q+42$

$r_{77}(b)=\ ? \iff b\equiv 77q+42\ (77)$

$77q+42\equiv 0+42\ (77)$

$\xRightarrow[\text{x Transitividad}]{T} b\equiv 42\ (77)$

$0\leq 42<77$, cumple condición de resto

$\Rightarrow \boxed{r_{77}(b)=42}$ Arrastra error antes.

<u>NOTA</u>: Podría haberlo terminado diciendo

$b=77q+42$, q es el cociente y 42 cumple condición del resto.

Bien

$\boxed{2}$ $p \mid 15^{2p-2}+7^{p+3}+174 \iff 15^{2p-2}+7^{p+3}+174 \equiv 0\ (p)$

Miremos algunos casos primero

$p \nmid 15 \Rightarrow 15^{2p-2} \equiv 15^{2(p-1)} \equiv (15^2)^{p-1} \overset{PTF}{\equiv} 1\ (p)$

↳ p no es ni 5 ni 3 — $p \nmid a$, p primo $\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\ (p)$

$p \nmid 7 \Rightarrow 7^{p+3} \equiv 7^p \cdot 7^3 \overset{PTF}{\equiv} 7^4\ (p)$

↳ p no es 7. — $(p \nmid a \Rightarrow a^p \equiv a\ (p))$

No necesitas esto

Pedimos que $p \nmid 15 \cdot 7 = 105$, con p primo.

Si $p \nmid 105 \Rightarrow 15^{2p-2}+7^{p+3}+174 \equiv 1+7^4+174\ (p)$.

Ahora $1+7^4+174 \equiv 0\ (p)$ $\left(\text{pues pedimos que } p \mid 15^{2p-2}+7^{p+3}+174\right)$

$2576 \equiv 0\ (p)$

↳ O sea hay algún $p \,/\, p \mid 2576$

$2576 = 2^4 \cdot 7 \cdot 23$

Pero por hipótesis $p \nmid 105$, o sea $p \nmid 5 \wedge p \nmid 3 \wedge p \nmid 7$

$\Rightarrow$ con $p = 2$ o 23, $p \mid 15^{2p-2}+7^{p+3}+174$.

Ahora miremos los otros casos

$p \mid 5 \Rightarrow 15^{2 \cdot 5-2}+7^{5+3}+174 \equiv 0+2^8+174 \equiv 2^8+4\ (5)$

$\Updownarrow$ p primo

$p=5$ — $2^8+4 \equiv 256+4 \equiv \underbrace{260 \equiv 0\ (5)}_{\text{se cumple!}}$

con $p=5$, $p \mid 15^{2p-2}+7^{p+3}+174$.

$p \mid 3 \Rightarrow 15^{2 \cdot 3-2}+7^{3+3}+174 \equiv \underline{0+1^6+0 \not\equiv 0}\ (3)$

$\Updownarrow$ $\Rightarrow$ con $p=3$, $p \nmid 15^{2p-2}+7^{p+3}+174$ ↳ no se cumple

$p=3$

$p \mid 7 \Rightarrow 15^{2 \cdot 7-2}+7^{7+3}+174 \equiv 1^{12}+0+6 \equiv \underbrace{7 \equiv 0\ (7)}_{\text{se cumple!}}$

$\Updownarrow$

$p=7$ — $\Rightarrow$ con $p=7$, $p \mid 15^{2p-2}+7^{p+3}+174$

$\Rightarrow \boxed{p \mid 15^{2p-2}+7^{p+3}+174, \text{ con } p = 2, 5, 7 \text{ o } 23}$

Bien

$\boxed{3}$ $\underbrace{\sum_{j=0}^{64} \omega^j}_{(A)} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{64} \overline{\omega}^j}_{(B)}$

(A) $\sum_{j=0}^{64} \omega^j = \frac{\omega^{65}-1}{\omega-1} = \frac{\omega^{10}-1}{\omega-1}$

geométrica $\omega \neq 1$. $\omega \in G_n \Rightarrow \omega^m = \omega^{r_n(m)}, m \in \mathbb{Z}$

(B) $\sum_{j=0}^{64} \overline{\omega}^j = \frac{(\overline{\omega})^{65}-1}{\overline{\omega}-1} = \frac{(\omega^{-1})^{65}-1}{\overline{\omega}-1} = \frac{\omega-1}{\overline{\omega}-1} = \frac{\omega-1}{\omega^{10}-1}$

$\overline{\omega} \neq 1$ geométrica $\qquad \overline{\omega} = \omega^{-1}, \omega \in G_n$

Obs pedir $\overline{\omega} \neq 1$, es lo mismo que pedir $\omega \neq 1$ ($\overline{1} = 1$)

Si $\omega \neq 1$, (A) (B) $= \frac{\omega^{10}-1}{\omega-1} \cdot \frac{\omega-1}{\omega^{10}-1} = 1$, si $\omega^{10}-1 \neq 0$
$\omega^{10} \neq 1$.

Pero $\omega^{10} = 1$ nunca va a pasar pues sabemos que:

$n | m \iff G_n \subseteq G_m$

y como $10 \nmid 11 \Rightarrow G_{10} \not\subseteq G_{11}$

¿y esto cómo contradice que $\omega \in G_{11}$?
Si $\omega = 1 \Rightarrow \omega^{10} = 1$
$\in G_{11}$

Ahora si $\omega = 1 = \overline{\omega}$

$\sum_{j=0}^{64} \omega^j \cdot \sum_{j=0}^{64} \overline{\omega}^j = \sum_{j=0}^{64} 1^j \cdot \sum_{j=0}^{64} 1^j = \left(\sum_{j=0}^{64} 1\right)^2 = 65^2 = 4225$

$\sum_{j=0}^{64} \omega^j \cdot \sum_{j=0}^{64} \overline{\omega}^j = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \neq 1 \\ 4225 & \text{si } \omega = 1 \end{cases}$

Podrías usar que $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$ (con $n = 11 \wedge m = 10$)

Bien

[4] Se nos pide un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado mínimo que satisfaga:

ⓐ f mónico

ⓑ $gr(f : 3x^3 - x^2 + x + 2) = 2$

ⓒ $(x-3+\sqrt{2})^2$ divide a $(f : f')$ en $\mathbb{R}[x]$.

ⓓ f tiene al menos una raíz cuádruple.

De la condición ⓒ sé dos cosas

1) $(3-\sqrt{2})$ es raíz de f y como $f \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow (3+\sqrt{2})$ (el conjugado) es también raíz de f y tiene la misma multiplicidad

2) Si $(x-3+\sqrt{2})^2 \mid (f : f') \Leftrightarrow (x-3+\sqrt{2})^2 \mid f' \wedge (x-3+\sqrt{2})^2 \mid f$

Pero si divide a f' y a f, entonces la $mult(3-\sqrt{2}, f) \geq 3$

(por ej, $g = (x-a)^3$, $g' = 3(x-a)^2$, pero también $\tilde{g} = (x-a)^4$, $\tilde{g}' = 4(x-a)^3$ y $(x-a)^2 \mid (\tilde{g} : \tilde{g}')$, por eso $mult(3-\sqrt{2}, f) \geq 3$ y no igual a 3). no es uno denso, pero es lo que quiero decir.

Hasta ahora sé $mult(3-\sqrt{2}, f) = mult(3+\sqrt{2}, f) \geq 3$.

contadas con su multiplicidad

De la condición ⓑ sé que f comparte dos raíces con $3x^3 - x^2 + x + 2$

(pues $f(\alpha) = 0 \wedge g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f:g)(\alpha) = 0$ ‖ $gr(f:g) = 2$, $(f:g)$ tiene 2 raíces en $\mathbb{C}[x]$)

Busquemos las raíces de $p(x) = 3x^3 - x^2 + x + 2$, con lema de Gauss.

Candidatos a raíces de $p(x) = \{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}\}$.

$p\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$] $\xrightarrow{\text{Ruffini}}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & \downarrow & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 3 & -3 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$p(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 - 3x + 3)$

Buscamos raíces de $3x^2-3x+3$

$x_i = \frac{3 \pm w}{2\cdot 3}$ y $w^2 = (-3)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = -27$

$|w|^2 = |-27| = 27 \overset{|w|\geq 0}{\iff}$

$\iff |w| = 3\sqrt{3}$

$\arg(w^2) = \arg(-27)$

$2\arg(w) + 2k\pi = \pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\arg(w) = \frac{\pi - 2k\pi}{2}$

$0 \leq \frac{\pi - 2k\pi}{2} < 2\pi$

$0 \leq \pi - 2k\pi < 4\pi$

$0 \leq 1 - 2k < 4$

$-1 \leq -2k < 3$

$k \in [-1, 0] \iff \frac{1}{2} \geq k > -\frac{3}{2}$

$w_1 \overset{(*)}{=} 3\sqrt{3}\, e^{\frac{3}{2}\pi i} =$

$= -3\sqrt{3}\, i$

$w_2 = 3\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{2} i}$

$= 3\sqrt{3}\, i$

$\boxed{\text{CRUX } (*)\quad \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}}$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}\, i}{6}$

Ahora tenemos las tres raíces de $p(x)$, y sabemos que el $gr(f : p(x)) = 2$, quiere decir que comparten dos raíces, entonces otras dos raíces de f deben ser (a parte de la que tenemos) $\frac{3+3\sqrt{3}\, i}{6}$ y $\frac{3-3\sqrt{3}\, i}{6}$ pues como $f \in \mathbb{R}[x]$,

si hay una raíz no racional compleja, su conjugado debe ser raíz (por eso tomamos estas dos y no $-\frac{2}{3}$)

(OBS IMPORTANTE!! → las raíces de $3x^2-3x+3$ son las mismas que las de x^2-x+1.)

Ahora bien, la condición ⓓ me pide que f tenga una raíz cuádruple, pero la consigna pide que f sea de grado mínimo, entonces no puedo "inventar" una nueva raíz, debería de usar algunas de las que ya conozco.

En particular, sé que $\text{mult}(3+\sqrt{2}, f) = \text{mult}(3-\sqrt{2}, f) \geq 3$

Entonces puedo pedir que $\text{mult}(3+\sqrt{2}, f) = \text{mult}(3-\sqrt{2}, f) = 4$

(<u>Obs no trivial</u>: La multiplicidad cuádruple le pertenece a las raíces mencionadas, pues si les diera una multiplicidad cuádruple a otra raíz, aún así $\text{mult}(3+\sqrt{2}, f) = \text{mult}(3-\sqrt{2}, f) = 3$ (para que sea de grado mínimo) y el grado de f sería mucho mayor al que ya tenemos.)

Entonces:

$$f(x) = (x-3+\sqrt{2})^4 (x-3-\sqrt{2})^4 \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

Para factorizarlo en $\mathbb{Q}[x]$ hay que multiplicar los ~~términos~~ factores

$$\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = x^2 - x + 1$$

(Recordando que $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ son raíces de $3x^2 - 3x + 3$ y pedimos f mónico)

$$(x-3+\sqrt{2})^4 (x-3-\sqrt{2})^4 = \left[(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})\right]^4 =$$

$$= (x^2 - 3x - \cancel{\sqrt{2}x} - 3x + 9 + \cancel{3\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}x} - \cancel{3\sqrt{2}} - 2)^4 = (x^2 - 6x + 7)^4$$

$$f(x) = (x^2-6x+7)(x^2-6x+7)(x^2-6x+7)(x^2-6x+7)(x^2-x+1).$$

↳ son de grado 2 y sus raíces no son racionales, así que f está factorizada en irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$.