1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre:

No. de libreta:

Carrera:

ANÁLISIS 1

Final - 21/12/2010

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Probar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x,$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que existen las derivadas dobles cruzadas, pero que en $(0,0)$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

   c) ¿Es f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$?

   d) ¿Es f una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$?

2. a) Sea $k > 0$, encontrar el mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ sobre el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : xy = k\}.$$

   b) Probar que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x, y > 0$ vale que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

3. Sean $a, b > 0$. Calcular $\iint_E |xy| dxdy$, donde E es la elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $a < b$. Probar que existe $M > 0$ tal que, para todo $x, y \in [a,b]$, se verifica

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(1,2) = 0$.

   a) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua tal que $\gamma(0) = (0,0)$ y $\gamma(1) = (1,2)$. Si $f(0,0) = -1$, probar que existe un punto p en la imagen de γ tal que $f(p) = -1/2$.

   b) Probar que si f es de clase C^1 y $\nabla f(1,2) \neq (0,0)$, entonces existen infinitos puntos $p \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(p) = 0$.

→ Justificación

Justifique todas sus respuestas.

21/12/2010

1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,y)-f(0,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}\,y(t^2-y^2)}{\cancel{t}\,(t^2+y^2)}=\frac{-y^3}{y^2}=\boxed{-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{x\cancel{t}(x^2-t^2)}{\cancel{t}\,(x^2+t^4)}=\frac{x^3}{x^2}=\boxed{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t}=\boxed{1}$$

$$\neq$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{t}=\boxed{-1}$$

$\forall (x,y)\neq(0,0)$ | Vale pues composición de $\mathcal{C}^1$ es $\mathcal{C}^1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(y(x^2-y^2)+xy\,2x)(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^2}=\quad \lim_{(x,y)}\to 0$$

$$\left|\frac{(x^2y-y^3+2yx^2)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right|\leq\frac{|x|^2|y|-|y|^3+2|y||x|^2)(|x|^2+|y|^2)-2\cdots}{\|x,y\|^2}$$

$|x|\leq\|x,y\|$

$|y|\leq\|x,y\|$

$$\leq\frac{(\|x,y\|^2\cdot\|x,y\|+\|x,y\|^3+2\|x,y\|\,\|x,y\|^2)(\|x,y\|^2+\|x,y\|^2)+2\|x,y\|^2\|x,y\|(\|x,y\|^2+\|x,y\|^2)}{\|x,y\|^4}$$

$$\leq\frac{(4\|x,y\|^3)\cdot(2\|x,y\|^2)+4\|x,y\|^5}{\|x,y\|^4}=\frac{12\|x,y\|^5}{\|x,y\|^4}=12\|x,y\|\leq 12\,\delta<\varepsilon$$

$$\boxed{\delta<\varepsilon/12}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{(x(x^2-y^2)-xy.2y)(x^2+y^2)-(xy(x^2-y^2).2y)}{(x^2+y^2)^2}$ $\boxed{21|12|10}$ 1.

$f \in \mathcal{C}$

$f \notin \mathcal{C}^2$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3-xy^2-2y^2x)(x^2+y^2)-2y^2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\left|\frac{(x^3-xy^2-2y^2x)(x^2+y^2)-2y^2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} - 0\right| \leq$$

$N = \|x,y\|$

$$\frac{(N^3+N^3+2N^3)(2N^2)+2N^3(2N^2)}{N^4} = \text{.....} \Rightarrow \boxed{\delta < \frac{\varepsilon}{12}}$$

---

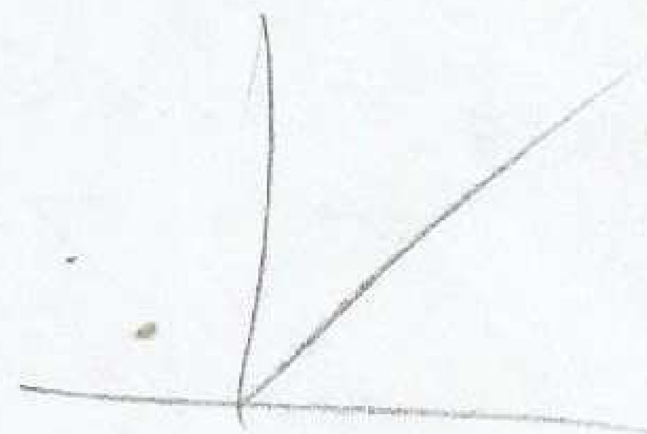
(2) $k>0$ mín $f(x,y)=x+y$ sobre $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{\geq 0} : xy=k\}$

$\nabla f = \lambda \nabla g$ $\boxed{\lambda \neq 0}$

$(1,1)=\lambda(y,x) \Rightarrow$ $1=\lambda x$ $\lambda = 1/x$

$1=\lambda y$ $\lambda = 1/y$ $\Rightarrow \boxed{x=y}$

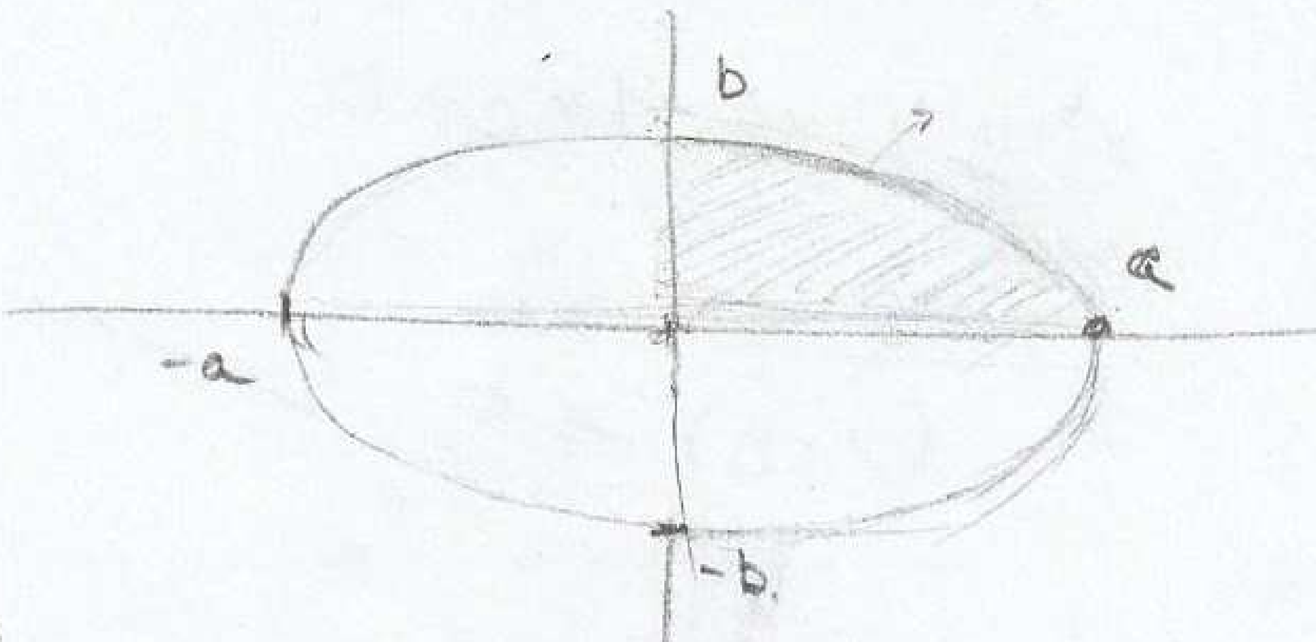
$\boxed{\lambda=0}$ → ridicúl



---

(3) $a,b>0$ $\iint_E |xy|\,dx\,dy$ $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$

$= 4\iint_{\text{1er cuadrante}} xy\,dx\,dy = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})b^2}} xy\,dy\,dx$



$= 4\int_0^a x \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})b^2}} dx = 4\int_0^a \frac{x}{2}\left(\sqrt{\left(1-x^2/a^2\right)b^2}\right)^2 dx$

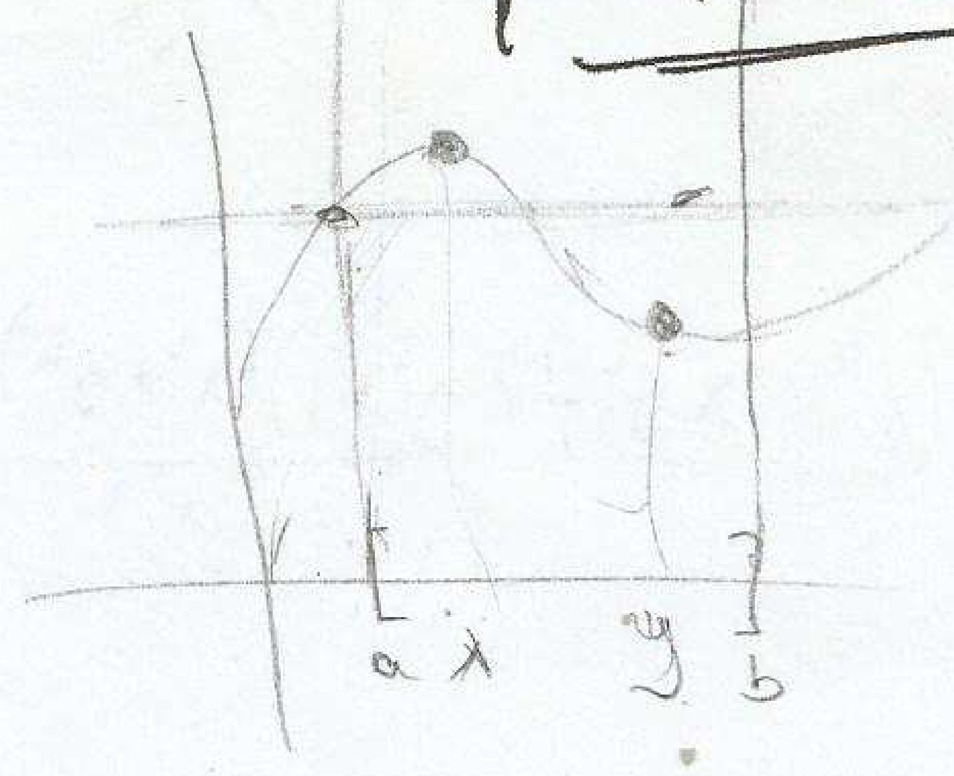
$= 2\int_0^a b^2x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\int_0^a b^2\left(x-\frac{x^3}{a^2}\right)dx = b^2 2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4a^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=a}$

$= b^2 2\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\cancel{a^4}^{\,2}}{4\cancel{a^2}}\right) = a^2b^2 - \frac{a^2b^2}{2} = \boxed{\frac{a^2b^2}{2}}$

(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ $a < b$. Probar que $\exists M > 0$ tal que

$\boxed{21/12/10}$

$\forall x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$



$x = y \Rightarrow |f(x) - f(x)| \leq M\,|x - x| \Leftrightarrow 0 \leq 0$ ✓

Aplico Lagrange en $[x, y]$.
(valen las hip).

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| = M_{(x,y)}$$

Sea $L = \{ M_{x,y} : x, y \in [a, b] \} \Rightarrow \boxed{M = \sup\{L\}}$

$\swarrow$ Sito inf

Quiero ver que L está acotado.

L está acotado pues

$L = \{ M_{x,y} : \quad \} = |f'(c_{x,y})|$ y $f'(c) < \infty \quad \forall c \in [a, b]$

(pues $f'(x)$ es continua y $[a, b]$ es compacto). $\longrightarrow$ pues $f \in \mathcal{C}^1$

$\boxed{21/12/10}$

(2b)

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{x y}$$

$$(x + y)^2 \geq 4 \cdot x y$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$(x - y)^2 \geq 0 \quad \swarrow$$

(5a) ~~continua~~

$f(0,0) = -1 \qquad \gamma(0) = (0,0)$

$f(1,2) = 0 \qquad \gamma(1) = (1,2)$

γ continua.

Probar que $\exists\, p' \;/\; f(\gamma(p')) = -\frac{1}{2}$

$f(p) = -1/2$

$f(\gamma(0)) = -1$
$f(\gamma(1)) = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$ por TVM, $\exists\, p' \in [0,1]$ tal que $f(\gamma(p')) = -1/2$

$f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ pues $f \circ \gamma$ es continua.

$h: [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ $h(x) =$

$\boxed{x \neq y}$ $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$

Quiero ver que $\left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M$.

Sea $M > |f'(c)|$

Yo sé, por Lagrange, que $\exists\, c \in (x, y)$ $\quad \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(c)| < M$$

$$\boxed{\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < M}$$

QED