Tema 2

| 1 | 2 | 3 | 4 | Calificación |
|---|---|---|---|---|
| B- | B | B | B | A |

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO PRÁCTICO: 1 | 2 | 3 | 4 | 5

L.U:

CARRERA: Cs. de la Computación

---

## Análisis I - Matemática 1 - Análisis II (C) - Análisis Matemático I

Segundo Parcial - 28 de noviembre de 2015

En caso de recuperar el 5/12, ¿ qué parcial preferiría 1 | 2 ?

---

1. Demostrar que la ecuación $2z + xyz - 2z^2 = -x^2$ define una función implícita $z = \psi(x, y)$ (diferenciable) en un entorno del punto $(0, 0, 1)$.

   Probar que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico de $\psi$ y clasificarlo como **extremo local** o **punto silla** según corresponda.

---

2. Hallar todos los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y) = -y^2(x - 1)$ restringida a la región
$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + 8y^2 = 12\}.$$

---

3. Hallar todos los valores de $\alpha > 0$ para los cuales la integral impropia
$$\int_2^{+\infty} \frac{x^6(1 + cos^2(x))}{(x-1)^2(x+1)^2x^\alpha}\, dx$$
es convergente.

---

4. Hallar el volúmen del sólido dado por
$$W := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -1 \leq z \leq x^2 + y^2 \ , \ \ x^2 + y^2 \leq 3\right\}.$$

---

*Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.*
*Justifique todas sus respuestas.*

2DO PARCIAL - ANÁLISIS MATEMÁTICO II   HOJA 1
28/11/2015

1) $f(x,y,z) = 2z + xyz - 2z^2 + x^2$ (defino una función en base a la ecuación dada).

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$ → valores que cumplen la ecuación

· $f(0,0,1) = 2 + 0 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow (0,0,1) \in S$.

· $f$ es un polinomio $\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

· $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2 + xy - 4z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = -2 \neq 0$.

∴ Por el teorema de la función implícita, la ec. $f(x,y,z) = 0$ define una función $z = \Psi(x,y)$ en un entorno $U$ de $(0,0,1)$; $\Psi \in C^\infty(U) \Rightarrow \Psi$ es diferenciable en $U$. Además, $\Psi(0,0) = 1$

$\Psi_x(0,0) = -\frac{f_x(0,0,1)}{f_z(0,0,1)} \wedge \Psi_y(0,0) = -\frac{f_y(0,0,1)}{f_z(0,0,1)}$

Probar que $(0,0)$ es P.C. de $\Psi$ y clasificarlo como extremo o punto silla:

· Derivo la ecuación $f(x,y,\Psi(x,y))$ todas las veces que haga falta para buscar las derivadas parciales primeras y segundas (sé que se puede hacer porque $f, \Psi \in C^\infty$); así armo $\nabla\Psi(0,0)$ y $H\Psi(0,0)$.

$2\Psi + xy\Psi - 2\Psi^2 + x^2 = 0 \qquad \Psi = \Psi(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x}: 2\Psi_x + y\Psi + xy\Psi_x - 4\Psi\cdot\Psi_x + 2x = 0$. ~~En (0,0,1): 2Ψx(0,0)~~

En $(0,0,1)$: $2\Psi_x(0,0) + 0\cdot\Psi(0,0) + 0\cdot\Psi_x(0,0) - 4\cdot1\cdot\Psi_x(0,0) + 2\cdot0 = 0$

$\Rightarrow -2\Psi_x(0,0) = 0 \Rightarrow \Psi_x(0,0) = 0$.

$\frac{\partial}{\partial y}: 2\Psi_y + x\Psi + xy\Psi_y - 4\Psi\cdot\Psi_y = 0$.

En $(0,0,1)$: $2\Psi_y(0,0) + 0\cdot\Psi(0,0) + 0\cdot\Psi_y(0,0) - 4\cdot1\cdot\Psi_y(0,0) = 0$.

$\Rightarrow -2\Psi_y(0,0) = 0 \Rightarrow \Psi_y(0,0) = 0$.

∴ $\nabla\Psi(0,0) = (\Psi_x(0,0), \Psi_y(0,0)) = (0,0) \Rightarrow (0,0)$ es P.C. de $\Psi$.

FIJATE QUE YA SABIAS $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,\Psi)$ Y LO MISMO CON $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$. ESTA BIEN IGUAL

$\frac{\partial^2}{\partial^2 x^2}$: $2\Psi_{xx}+y\Psi_x+y\Psi_x+xy\Psi_{xx}-4\Psi_x^2-4\Psi\cdot\Psi_{xx}+2=0$

$\Rightarrow 2\Psi_{xx}+2y\Psi_x+xy\Psi_{xx}-4\Psi_x^2-4\Psi\cdot\Psi_{xx}+2=0.$

En $(0,0,1)$: $2\Psi_{xx}(0,0)+2\cdot0\cdot0+0\cdot\Psi_{xx}(0,0)-4\cdot0^2-4\cdot1\cdot\Psi_{xx}(0,0)+2=0$

$\Rightarrow -2\Psi_{xx}(0,0)+2=0 \Rightarrow 2\Psi_{xx}(0,0)=2 \Rightarrow \Psi_{xx}(0,0)=1.$

$\frac{\partial^2}{\partial^2 y^2}$: $2\Psi_{yy}+x\Psi_y+x\Psi_y+xy\Psi_{yy}-4\Psi_y^2-4\Psi\cdot\Psi_{yy}=0.$

$\Rightarrow 2\Psi_{yy}+2x\Psi_y+xy\Psi_{yy}-4\Psi_y^2-4\Psi\cdot\Psi_{yy}=0.$

En $(0,0,1)$: $2\Psi_{yy}(0,0)+2\cdot0+0\cdot\Psi_{yy}(0,0)-4\cdot0^2-4\cdot1\cdot\Psi_{yy}(0,0)=0$

$\Rightarrow -2\Psi_{yy}(0,0)=0 \Rightarrow \Psi_{yy}(0,0)=0.$

$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$ (porque $f,\Psi\in C^2$):

$2\Psi_{xy}+\Psi+y\Psi_y-4\Psi_y\cdot\Psi_x-4\Psi\cdot\Psi_{xy}=0$ × $2\varphi_{xy}+\varphi+y\varphi_y+x\varphi_x+xy\varphi_{xy}-4\varphi_x\varphi_y-4\varphi\varphi_{xy}$

En $(0,0,1)$: $2\Psi_{xy}(0,0)+1+0-4\cdot0-4\cdot\Psi_{xy}(0,0)=0 \Rightarrow -2\Psi_{xy}(0,0)+1=0$

$\Rightarrow \Psi_{xy}(0,0)=\Psi_{yx}(0,0)=\frac{1}{2}$

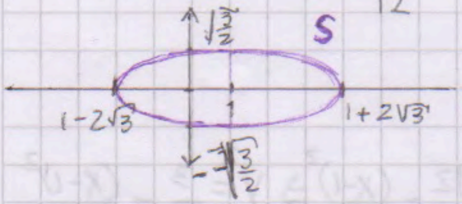
$\therefore H\Psi(0,0)=\begin{bmatrix}\Psi_{xx}(0,0) & \Psi_{xy}(0,0)\\ \Psi_{yx}(0,0) & \Psi_{yy}(0,0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \det(H\Psi(0,0))=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \det(H\Psi(0,0))<0 \Rightarrow$ por el criterio del determinante:
como $\nabla\Psi(0,0)=(0,0) \wedge \det(H\Psi(0,0))<0$, $(0,0)$ es un punto silla de $\Psi$.

2DO PARCIAL - ANÁLISIS MATEMÁTICO II     HOJA 2
28/11/2015

2) $f(x,y) = -y^2(x-1)$ $\quad S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 8y^2 = 12\}$

$(x-1)^2 + 8y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{12} + \frac{2}{3}y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3/2}}\right)^2 = 1$ elipse




· S es cerrado y acotado $\Leftrightarrow$ S es compacto ¡y en S!

- f es un polinomio $\Rightarrow f$ es $C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ es continua en S

$\therefore f|_S$ alcanza sus extremos absolutos

· Defino $g(x,y) = (x-1)^2 + 8y^2 - 12$ ; $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$.

· $f \in C^\infty(S) \Rightarrow f \in C^1(S)$; g es un polinomio $\Rightarrow g \in C^1(S)$.

· $\nabla g(x,y) = (2(x-1), 16y)$. $\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 + 8y^2 - 12 = -12 \neq 0 \Rightarrow \nabla g(x,y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in S$.

$\therefore$ Puedo usar multiplicadores de Lagrange para buscar puntos críticos en S: $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ ; $\nabla f(x,y) = (-y^2, -2y(x-1))$

$\Rightarrow (-y^2, -2y(x-1)) = \lambda(2(x-1), 16y)$

$$\begin{cases} \cancel{-y^2 = 2\lambda(x-1)} \quad (1) \\ \cancel{-2y(x-1) = 16\lambda y} \quad (2) \\ \cancel{(x-1)^2 + 8y^2 = 12 \quad (3) \Rightarrow y^2 = \frac{3}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}} \end{cases}$$ esto no va

~~Si $y \neq 0$: despejo (2): $-2y(x-1) = 16\lambda y \overset{\cdot \frac{1}{16y}}{\Rightarrow} \lambda = -\frac{x-1}{8}$ (4)~~

~~Reemplazo (4) y (3) en (1):~~

~~$-\left(\frac{3}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}\right) = 2\left(-\frac{x-1}{8}\right)(x-1) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{2(x-1)^2}{8} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)^2}{8} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow |x-1| = 4$~~

~~$\cdot$ Si $x-1=4 \Rightarrow x=5$~~

~~Si $x-1=-4 \Rightarrow x=-3$~~

~~Despejo (3): $\frac{(x-1)^2}{16}+y^2=12 \Rightarrow 1+y^2=12 \Rightarrow y^2=8 \Rightarrow |y|=2\sqrt{2}$~~

$$\begin{cases} -y^2 = 2\lambda(x-1) & (1) \\ -2y(x-1) = 16\lambda y & (2) \\ (x-1)^2+8y^2=12 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow 8y^2 = 12-(x-1)^2 \Rightarrow y^2 = \frac{12}{8} - \frac{(x-1)^2}{8} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}$

Si $y \neq 0$: despejo (2). $-2y(x-1) = 16\lambda y \Rightarrow \lambda = -2y(x-1)\cdot\frac{1}{16y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{x-1}{8}$ (4)

Reemplazo (4) y (3) en (1): $-\left(\frac{3}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}\right) = 2\left(-\frac{x-1}{8}\right)(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{2(x-1)^2}{8} \Rightarrow \frac{3}{8}(x-1)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-1| = 2$. Si $x-1=2 \Rightarrow x=3$ ; si $x-1=-2 \Rightarrow x=-1$

Reemplazo en (3): $(x-1)^2+8y^2=12 \Rightarrow 4+8y^2=12 \Rightarrow 8y^2=8 \Rightarrow |y|=1$

$\Rightarrow y=1 \vee y=-1$. Encontré $P_0=(3,1)$; $P_1=(3,-1)$; $P_2=(-1,1)$; $P_3=(-1,-1)$.

Por las dudas veo que no haya ningún absurdo con $\lambda$:

~~$x-1=2$~~ $(3,1)$: $-1 = 2\lambda\cdot 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$ ; $-4 = 16\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$ ✓

$(3,-1)$: $-1 = 2\lambda\cdot 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$ ; $4 = -16\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$ ✓

$(-1,1)$: $-1 = -4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ ; $4 = 16\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ ✓

$(-1,-1)$: $-1 = -4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ ; $-4 = -16\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ ✓.

$\therefore$ todos los P.C. sirven.

Falta ver qué pasa con $y=0$:

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda(x-1) \Rightarrow x=1 \vee \lambda=0 \\ 0 = 16\lambda\cdot 0 \\ (x-1)^2 = 12 \Rightarrow |x-1| = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 1+2\sqrt{3} \vee x = 1-2\sqrt{3} \end{cases}$$

$\rightarrow$ imposible: $(1,0) \notin S$.

continúa en la hoja sig.

2DO PARCIAL - ANÁLISIS MATEMÁTICO II HOJA 3

28/11/2015

Encontré $P_4 = (1+2\sqrt{3}, 0)$ ; $P_5 = (1-2\sqrt{3}, 0)$.

Evalúo en todos y elijo los extremos:

$f(3,1) = -2 \quad f(3,-1) = -2 \quad f(-1,1) = 2 \quad f(-1,-1) = 2$

$f(1+2\sqrt{3}, 0) = 0 \quad f(1-2\sqrt{3}, 0) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \therefore \max\left(f|_A\right) = 2 \text{ en } (-1,1) \text{ y } (-1,-1) \\ \min\left(f|_A\right) = -2 \text{ en } (3,1) \text{ y } (3,-1). \end{array}}$$

3) $$\int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{x^6(1+\cos^2(x))}{(x-1)^2(x+1)^2x^\alpha}}_{f(x)}\, dx$$

~~Problemas:~~ Problema: $+\infty$

En todo el intervalo $[2; +\infty)$ : $f(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ puedo usar el criterio de comparación

si diverge $\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ div.

~~$x^6(1+\cos^2(x))$ $1\cos^2(x) \leq 1 \Rightarrow$~~ $\quad 0 \leq \cos^2(x) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+\cos^2(x) \leq 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x^6}{(x-1)^2(x+1)^2x^\alpha}}_{\tilde{f}(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{2x^6}{(x-1)^2(x+1)^2x^\alpha}}_{\tilde{\tilde{f}}(x)} \quad (\text{para } x \geq 2)$$

si converge $\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ conv.

Debo hallar $\alpha / \int_2^{+\infty} \tilde{f}(x)\,dx$ diverge y $\alpha / \int_2^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}(x)\,dx$ converge, y deducir con qué $\alpha$ va a converger $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ a partir de eso.

$$\tilde{f}(x) = \underbrace{\frac{x^6}{(x-1)^2(x+1)^2x^\alpha}}_{\text{factor común } x \text{, distribuyo cuadrados}} = \frac{x^6}{x^4\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)x^\alpha} = \frac{x^6}{x^{\alpha+4}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} \underset{\cdot \frac{1}{x^6}}{=} \frac{1}{x^{\alpha-2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

~~Si $\alpha > 2$~~ ~~$0 < \alpha < 2$~~: ~~$\tilde{f}(x) = \frac{x^{2-\alpha}}{(1-\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x})}$~~

~~Si $0<\alpha<2$~~ Si $\alpha=3$: $\tilde{f}(x)=\dfrac{1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}$
$\Leftrightarrow \alpha-2=1$

Uso el criterio de comparación por cociente con $g(x)=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\left(1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}=1\neq 0$$ álgebra de límites

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} g(x)$ diverge $\Leftrightarrow \int_2^{+\infty}\tilde{f}(x)$ diverge.

$$\int_2^{+\infty} g(x)\,dx=\ln(x)\Big|_2^{+\infty}=\lim_{t\to+\infty}\ln(t)-\ln(2)=+\infty \text{ diverge}$$

$\Rightarrow \int_2^{+\infty}\tilde{f}(x)$ diverge $\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)$ diverge para $\alpha=3$.

~~Si $2<\alpha<3$:~~ Si $0<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 2<\alpha<3$: Uso el criterio de comparación por cociente con $\frac{1}{x^{\alpha-2}}=h(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-2}}{x^{\alpha-2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1\neq 0$$

$\int_2^{+\infty} h(x)\,dx$ diverge porque $0<\alpha-2<1$ (visto en la práctica).

$\Rightarrow \int_2^{+\infty}\tilde{f}(x)$ diverge $\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)$ diverge para $2<\alpha<3$.

Si $0<\alpha<2$: Tengo $\tilde{f}(x)=\dfrac{x^{2-\alpha}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Uso crit. de comparación
$\Rightarrow \alpha-2<0$ por cociente con $i(x)=x^{2-\alpha}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\tilde{f}(x)}{i(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^{2-\alpha}}}{\cancel{x^{2-\alpha}}\underbrace{\left(1-\tfrac{1}{x}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1+\tfrac{1}{x}\right)}_{\to 1}}=1\neq 0$$

$$\int_2^{+\infty} x^{2-\alpha}\,dx=\frac{x^{3-\alpha}}{3-\alpha}\Bigg|_2^{+\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\overbrace{3-\alpha}^{>0}}}{3-\alpha}-\frac{2^{3-\alpha}}{3-\alpha}=+\infty \Rightarrow \int_2^{+\infty}\tilde{f}(x)\,dx \text{ diverge}$$ diverge

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge para $0<\alpha<2$

continúa en la hoja sig.

2DO PARCIAL - ANÁLISIS MATEMÁTICO II   HOJA 4

28/11/2015

Si $\alpha = 2$: $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}$   Comparo por cociente con $j(x)=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{j(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

$$\int_2^{+\infty} 1\,dx = x\Big|_2^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} t-2 = +\infty \text{ diverge} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \tilde{f}(x)\,dx \text{ diverge} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx \text{ diverge para } \cancel{0<\alpha<2}\ \ \alpha = 2.$$

Usando las mismas operaciones que usé para $\tilde{f}(x)$, obtengo

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \frac{2}{x^{\alpha-2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Si $\alpha-2>1 \Rightarrow \alpha>3$: Uso crit. de comparación por cociente con $k(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-2}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\tilde{\tilde{f}}(x)}{k(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^{\alpha-2}}}{\cancel{x^{\alpha-2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}} = 2 \neq 0$$

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,dx$ converge porque $\alpha-2>1$ (visto en la práctica).

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}(x)\,dx \text{ converge} \Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge para } \alpha>3.$$

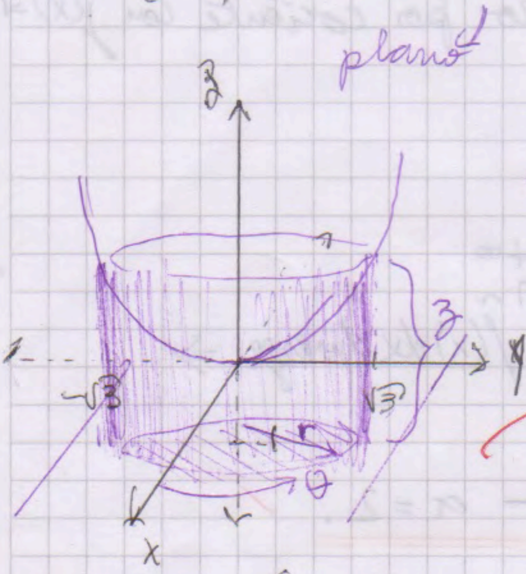
RESPUESTA:
$$\begin{cases} 0<\alpha\leq 3 \Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx \text{ diverge} \\ \alpha>3 \Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.} \end{cases}$$

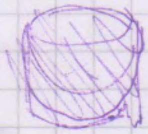
FIJATE QUE PARA $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\ \ 2}{x^{\alpha}(x-1)^2(x+1)^2}$ PODIAS COMPARAR DE UNA CON $1/x^{\alpha-2}$ Y VER CUANDO DIVERGÍA (COMO HICISTE CON LA OTRA)

4) Volumen del sólido dado por

$W := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -1 \le z \le x^2+y^2,\ x^2+y^2 \le 3\}$. $V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz$.

plano — paraboloide → circunferencia "rellena" del radio $\sqrt{3}$. → cilindro



¿Una especie de cilindro "calado" con un domo invertido?

Paso a coordenadas cilíndricas:

$T(r,\theta,z) = (x,y,z)$.

$$T(r,\theta,z)\begin{cases} x = r\cdot\cos(\theta) \\ y = r\cdot\operatorname{sen}(\theta) \\ z = z. \end{cases}$$

$0 \le r \le \sqrt{3}$

$0 \le \theta < 2\pi$ (para dar toda la vuelta a la circ.)

$-1 \le z \le x^2+y^2$

$\Rightarrow -1 \le z \le r^2\cos^2(\theta) + r^2\operatorname{sen}^2\theta$

$\Rightarrow -1 \le z \le r^2\underbrace{(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))}_{1\ \forall\,\theta\in\mathbb{R}} \Rightarrow -1 \le z \le r^2.$ $\quad JT(r,\theta,z) = r.$

$\therefore W^* := \{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le r\le\sqrt{3} \wedge 0\le\theta<2\pi \wedge -1\le z\le r^2\}$

T. del cambio de variables.

$T(W^*) = W \Rightarrow \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \iiint 1\,JT(r,\theta,z)\,dz\,dr\,d\theta =$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{-1}^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \cancel{(2\pi-0)} = (2\pi - 0)\int_0^{\sqrt{3}}\left(r\cdot z\Big|_{-1}^{r^2}\right)dr =$

Lo puedo hacer porque $\theta$ no aparece y va a quedar lineal respecto de $\theta$.

$-\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}$

$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} r^3 + r\,dr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right) = 2\pi\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\right) = 2\pi\left(\frac{9+6}{4}\right) =$

$= \boxed{\frac{15}{2}\pi}$.