Ejercicio 1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 600\}$. Se define en $\mathcal{P}(X)$ la relación dada por

$$A \mathcal{R} B \iff \#(A \triangle B) \leq 2$$

(a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

(b) Si $B = \{n \in X : n \equiv 2023 \ mod\ 14\}$, calcular el cardinal del conjunto

$$\{A \in P(X) : A \mathcal{R} B\}.$$

---

Ejercicio 2. Calcular el máximo común divisor para cada $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\left(n^4 + 6n^3 - 27n + 7 : n^2 + 3n - 10\right)$$

---

Ejercicio 3. Hallar todos los pares $a, b$ coprimos, $a, b \in \mathbb{Z}$, tales que

$$\frac{6a}{b} - \frac{79a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}.$$

---

Ejercicio 4. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ la sucesión definida por recurrencia:

$$a_0 = 3, \quad a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16, \ \ \forall\, n \geq 0.$$

Probar que

$$a_n > 5^n + 3n - 4 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$



Escaneado con CamScanner

1a.

Reflexividad: R es reflexiva sólo si para cada $A \in P(X)$, $ARA$.

Sea $A \in P(X)$, $A \Delta A = \emptyset$. Entonces, $\#(A\Delta A) = \#\emptyset = 0$. $0 \leq 2$.

Por lo tanto, $ARA$. Luego, R es reflexiva.

Simetría: R es simétrica si, para cada $A, B \in P(X)$ tal que $ARB$, se cumple $BRA$.

Sean $A, B \in P(X)$ tal que $ARB$, quiero ver que (qvq) $BRA$.

$ARB$. Entonces, $\#(A\Delta B) \leq 2$. $A\Delta B = B\Delta A$. Por lo tanto, $\#(B\Delta A) \leq 2$.

Luego, $BRA$, es decir, R es simétrica.

Antisimetría

Sean $A, B \in P(x)$ tal que $ARB$ y $BRA$, R es ~~[illegible]~~ antisimétrica sólo si $B = A$.

Contraejemplo: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\} \in P(x)$

$A\Delta B = B\Delta A = \{1,4\}$  $\#(A\Delta B) = \#(B\Delta A) = 2 \leq 2$

Por lo tanto, $ARB$ y $BRA$, pero $A \neq B$. Luego, R no es antisimétrica.

Transitividad

Sean $A, B, C \in P(x)$ tal que $ARB$ y $BRC$, R es transitiva sólo si $ARC$

Contraejemplo: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3,4,5\} \in P(x)$

$A\Delta B = \{1,4\}$, $\#(A\Delta B) = 2 \leq 2$ Luego, $ARB$.

$B\Delta C = \{2,5\}$, $\#(B\Delta C) = 2 \leq 2$. Luego, $BRC$.

$A\Delta C = \{1,2,4,5\}$, $\#(A\Delta C) = 4 \nleq 2$. Luego, $A \not R C$.

Por lo tanto, R no es transitiva

1b. $B=\{m\in X: m\equiv 2023\ (14)\}$ Busco el cardinal del conjunto $\{A\in P(X): ARB\}$. Es decir, busco la cantidad de conjuntos $A\in P(X)$ que cumplen $\#(A\Delta B)\leq 2$.

Para empezar, busco la cantidad de elementos del conjunto B. $B=\{m\in X: m\equiv 2023\ (14)\}$

$m\equiv 7\ (14)$, ~~[illegible]~~ $m=14k+7$

Como $B\subseteq X$, $1\leq m\leq 600$, $m\in\mathbb{N}$

$1\leq 14k+7\leq 600$

$-6\leq 14k\leq 593$

$-\frac{3}{7}\leq k\leq \frac{593}{14}\approx 42{,}3 \Rightarrow k\in[\overset{0}{1},42]$

Busqué cuántos elementos de X pertenecen a B

$\#B=4\cancel{2}\,43$, $B=\{7,21,35,\ldots,595\}$

Arrastro error corrijo a partir de acá asumiendo que $\#B=42$

Hay 3 casos disjuntos que se pueden tomar para encontrar la cantidad de conjuntos A tal que ARB

① $\#(A\Delta B)=0$

② $\#(A\Delta B)=1$

③ $\#(A\Delta B)=2$

El caso ①, implica que $A\Delta B=\emptyset$. Hay un solo conjunto que cumple esto: $A=B$. Entonces, el caso ① lo cumple un solo conjunto A. ✓

② $\#(A\Delta B)=1$

Esto puede ocurrir de dos formas:

- A contiene a todos los elementos de B y tiene 1 externo.
- A contiene todos los elementos de B menos 1. ✓

Si A contiene todos los elementos de B y uno externo, la cantidad de conjuntos A depende de qué elemento externo a B es elegido. (notar que $A\in P(X)$), por ende el elemento externo a B pertenece a X

Entonces, los A posibles son $\binom{600-42}{1} = 558$ ✓

600 son los elementos que $\in X$, y a eso se le resta $\#B = 42$.

Si A contiene a todos los elementos de B menos 1, la cantidad de conjuntos A depende de cuál es el elemento de B que excluyo. Es decir, $\binom{42}{1} = 42$ ✓

③ $\# A \Delta B = 2$

En este caso, se pueden dar 3 situaciones:

- hay 2 elementos que $\in A$ y $\notin B$
- hay 2 elementos que $\notin A$ y $\in B$
- hay un elemento que $\in A, \notin B$ y otro que $\notin A, \in B$.

En el primer caso, A tiene todos los elementos de B y 2 externos es decir, 2 elementos que $\in X, \notin B$. Entonces, la cantidad de conjuntos A posibles se escribe $\binom{600-42}{2} = \binom{558}{2}$ ✓

Es decir, la cantidad de elementos que $\in X, \notin B$ tomados de a 2.

Para el segundo caso, A contiene todos los elementos de B salvo 2. Entonces, la cantidad de conjuntos A depende de cuáles son esos dos elementos que se quedan fuera Es decir, $\binom{42}{2}$ ✓

Por último, el 3er caso se combina la cantidad de conjuntos A que contengan todos los elementos de B menos uno con la cantidad de ~~elementos~~ conjuntos A que contienen un elemento que $\in X, \notin B$

La cantidad de A posibles son, entonces,

$$\binom{42}{1}\binom{600-42}{1} = 42 \cdot \cancel{\phantom{000}}\ 558$$

Teniendo en cuenta todos los casos posibles, la cantidad total de conjuntos A es:

$$1 + 558 + 42 + \binom{558}{2} + \binom{42}{2} + \binom{558}{1}\binom{42}{1}$$

$$= 1 + \binom{558}{1} + \binom{42}{1} + \binom{558}{2} + \binom{42}{2} + \binom{558}{1}\binom{42}{1}$$

2) Busco $d = (m^4 + 6m^3 - 27m + 7 : m^2 + 3m - 10)$

d es el máximo común divisor (mcd) entre $m^4 + 6m^3 - 27m + 7$ y $m^2 + 3m - 10$. Es decir, d es el mayor número positivo que cumple:

$d \mid m^4 + 6m^3 - 27m + 7$ y $d \mid m^2 + 3m - 10$

Propiedades de la divisibilidad que voy a utilizar:

Sean $a, b_1, b_2$ tal que $a \mid b_1$ y $a \mid b_2$, entonces se cumple:

① $a \mid b_1 + b_2$

② $a \mid k.b_1$ y $a \mid k.b_2$

con $k \in \mathbb{Z}$

③ $a \mid k.b_1 + k.b_2$
(se deduce de ① y ②)

Entonces, si $d \mid m^4 + 6m^3 - 27m + 7$ y $d \mid m^2 + 3m - 10$

$\Rightarrow d \mid (m^2 + 3m - 10).m^2 = m^4 + 3m^3 - 10m^2$ por ②

$\Rightarrow d \mid m^4 + 6m^3 - 27m + 7 - (m^4 + 3m^3 - 10m^2) = 3m^3 + 10m^2 - 27m + 7$ por ③

y $d \mid (m^2 + 3m - 10)3m = 3m^3 + 9m^2 - 30m$ por ②

$\Rightarrow d \mid 3m^3 + 10m^2 - 27m + 7 - (3m^3 + 9m^2 - 30m) = m^2 + 3m + 7$ por ③

$\Rightarrow d \mid m^2 + 3m - 10 - (m^2 + 3m + 7) = -17$ por ③

$d \mid -17 \Rightarrow d \in \{1, 17\}$ pues d debe ser positivo (es el mcd)

analizo, mediante una tabla de restos, para qué valores de m se cumple $17 = (m^4 + 6m^3 - 27m + 7 : m^2 + 3m - 10)$

es decir, se cumple $17 \mid m^4 + 6m^3 - 27m + 7$ y $17 \mid m^2 + 3m - 10$

$m^4 + 6m^3 - 27m + 7 \equiv m^4 + 6m^3 - 10m + 7 \ (17)$ y $m^2 + 3m - 10 \equiv m^2 + 3m - 10 \ (17)$

Escaneado con CamScanner

$\equiv ?\ (7)$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
| $m^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 8 | 2 | 15 | 13 | 13 | 15 | 2 | 8 | 16 | 9 | 4 | 1 | |
| $m^3$ | 0 | 1 | 8 | 10 | 13 | 6 | 12 | 3 | 2 | 15 | 14 | 5 | 11 | 1 | 7 | 9 | 16 | |
| $m^4$ | 0 | 1 | 16 | 13 | 1 | 13 | 4 | 4 | 16 | 16 | 4 | 4 | 13 | 13 | 13 | 16 | 1 | |
| | 7 | 11 | $\boxed{0}$ | 8 | 1 | 13 | 9 | 9 | 10 | 13 | 1 | 8 | $\boxed{0}$ | 11 | 7 | 5 | 5 | $m^2+3m-10$ |
| | 7 | 4 | $\boxed{0}$ | 16 | 12 | 6 | 6 | 10 | 6 | 6 | 12 | 1 | $\boxed{0}$ | 15 | 7 | 12 | 12 | $m^4+6m^3-10m+7$ |

Entonces, se cumple

$17 = (m^2+6m^3-27m+7 : m^2+3m-10)$ para $m \equiv 2(17)$ y $m \equiv 12(17)$

para el resto de los casos, $(m^2+6m^3-27m+7 : m^2+3m-10) = 1$

Es decir, si $m \equiv 0(17)$, $m \equiv 1(17)$, $m \equiv 3(17)$, $m \equiv 4(17)$, $m \equiv 5(17)$, $m \equiv 6(17)$, $m \equiv 7(17)$, $m \equiv 8(17)$, $m \equiv 9(17)$, $m \equiv 10(17)$, $m \equiv 11(17)$, $m \equiv 13(17)$, $m \equiv 14(17)$, $m \equiv 15(17)$ y $m \equiv 16(17)$.

Muy bien!

Sapirstein, Ema

4

3) busco los pares a, b coprimos, $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$\frac{6a}{b} - \frac{79a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$, o, lo que es equivalente, $\frac{6ab - 79a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

~~Por ejemplo~~

Es decir, estoy buscando que

$b^2 | 6ab - 79a^2$

~~Propiedades de la divisibilidad que voy a utilizar~~

~~Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} / a_1 | b_1$ y $a_2 | b_2$~~

~~① $a_1 + a_2 | b_1 + b_2$ ② $a_1 + a_2 | k.b_1 + k.b_2$ con $k \in \mathbb{Z}$~~

~~Sean $a, b \in \mathbb{Z} / a \perp b$~~

~~① si $b | a.c \Rightarrow b | c$~~

Entonces, quiero que $b^2 | 6ab - 79a^2$. Como $b^2 = b.b$, puedo comenzar por pedir que $b | 6ab - 79a^2$

Prop: sea $b_1 \in \mathbb{Z}$ si $b_1 | a_1$ y $b_1 | a_2 \Rightarrow b_1 | a_1 + k.a_2$ con $k \in \mathbb{Z}$

Sé que $b | 6ab$ porque $b | b \Rightarrow b | k.b \ \forall k \in \mathbb{Z}$

quiero ver que $b | 79a^2$. $a \perp b \Rightarrow b \nmid a$. Por propiedad, siendo $a \perp b$, $b | k.a \Leftrightarrow b | k$.

Entonces, para que se cumpla $b | 79a^2$, se debe cumplir $b | 79$. Es decir, $b \in \{\pm 1, \pm 79\}$

Busco el valor de a analizando los posibles valores de b

Si $b = 1$, $\frac{6a}{b} - \frac{79a^2}{b^2} = 6a - 79a^2 \in \mathbb{Z} \ \forall a$ dado que

$1 | 6a - 79a^2 \ \forall a$

Si $b = -1$, $\frac{6a}{b} - \frac{79a^2}{b^2} = -6a - 79a^2 \in \mathbb{Z} \ \forall a$

Si $b = 79$

$$\frac{6a}{79} - \frac{79a^2}{79^2} = \frac{6a \cdot 79 - 79a^2}{79^2} = \frac{79(6a-a^2)}{79^2} \in \mathbb{Z}$$

quiero que

$\Longleftrightarrow$ $79 \mid 6a - a^2 = a(6-a)$

Como a y b son coprimos, $79 \nmid a$. Entonces, 79 tiene que dividir a $6-a$. Es decir, $6 \equiv a (79)$ o, lo que es equivalente, $a \equiv 6 (79)$

Si $b = -79$

$$\frac{6a}{-79} - \frac{79a^2}{79^2} = \frac{-6a \cdot 79 - 79a^2}{79^2} = \frac{79(-a^2-6a)}{79^2} = \frac{a(-a-6)}{79}$$

Quiero que pertenezca a $\mathbb{Z}$, y esto ocurre sólo si $79 \mid a(a+6)$.

Como a y b son coprimos, $79 \nmid a$. Entonces, debe cumplirse $79 \mid a+6$. Es decir, $a \equiv -6 (79)$

Respuesta:

Si $b = \pm 1$, $a \in \mathbb{Z}$

Si $b = 79$, $a \equiv 6 (79)$

Si $b = -79$, $a \equiv -6 (79)$

Son los pares que cumplen $\frac{6a}{b} - \frac{79a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$ con $a \perp b$

4) Tengo la sucesión

$a_0 = 3 \quad a_{m+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right) - 6m^2 + 13m + 16 \quad \forall m \geq 0$

quiero probar que $a_m > 5^m + 3m - 4 \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Lo pruebo por inducción global

quiero ver que se cumple $P(m): a_m > 5^m + 3m - 4 \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Caso base:

se cumple $P(0): a_0 = 3 > 5^0 + 3.0 - 4 = 1$

Paso inductivo

Supongo que se cumple $P(k)$ para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que satisface $0 \leq k \leq h$ y quiero ver que se cumple $P(h+1)$

supongo que se cumple $P(k): a_k > 5^k + 3k - 4$ hipotesis inductiva (Hi)

$P(h+1): a_{h+1} > 5^{h+1} + 3(h+1) - 4$

$$a_{h+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{h} a_k\right) - 6h^2 + 13h + 16 \overset{\text{Por Hi}}{>} 4\left(\sum_{k=0}^{h} 5^k + 3k - 4\right) - 6h^2 + 13h + 16$$

Calculo auxiliar

$$\sum_{k=0}^{h} 5^k + 3k - 4 = \underbrace{\sum_{k=0}^{h} 5^k}_{\text{serie geométrica}} + 3\overbrace{\sum_{k=0}^{h} k}^{\text{suma de Gauss}} - \sum_{k=0}^{h} 4 = \frac{5^{h+1} - 1}{4} + \frac{3h(h+1)}{2} - 4(h+1)$$

$$= \frac{5^{h+1} - 1 + 6h(h+1) - 16(h+1)}{4}$$

$$= 4\left(\frac{5^{h+1} - 1 + 6h(h+1) - 16(h+1)}{4}\right) - 6h^2 + 13h + 16$$

$= 5^{h+1} - 1 + \cancel{6h^2} + 6h - 16h - \cancel{16} - \cancel{6h^2} + 13h + \cancel{16}$

$= 5^{h+1} + 3h - 1 = 5^{h+1} + 3h + 3 - 4 = 5^{h+1} + 3(h+1) - 4$ ✓

Como se cumple el caso base y P(H) (implica P(h+1) para cada $K \in [0, h] \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$), vale $P(m)\ \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Queda probado, por inducción global, que vale

$a_m > 5^m + 3m - 4\ \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Muy bien!