① $(x-1)^2 + z^2 = 4$

② $x + y + z = 2$

Tengo que buscar la ① ∩ ②, pero primero observo que ① tiene forma de una circunferencia, radio 2, y con centro que pasa por $x=1$ y $z=0$. Entonces...

① $(x-1)^2 + z^2 = 4 \iff r(t) = \begin{cases} x = 1 + 2\cos(t) \\ z = 2\operatorname{sen}(t) \end{cases}$ ✓ $t \in [0, 2\pi]$

Sólo me falta encontrar una parametrización para "y". Observo que en ②

② $x + y + z = 2 \iff y = 2 - z - x$

① ∩ ② $\Rightarrow$ $y = 2 - (2\operatorname{sen}(t)) - (1 + 2\cos(t))$

$y = 2 - 2\operatorname{sen}(t) - 1 - 2\cos(t)$

$y = 1 - 2.(\operatorname{sen}(t) + \cos(t))$

Finalmente

a) $r(t) = (1 + 2\cos(t),\ 1 - 2(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)),\ 2\operatorname{sen}(t))$ ✓ B

b) Como la forma de la recta tangente es:

$T: \lambda(r'(t_0)) + r(t_0)$ ✓

$r(t_0)$: punto de paso (P)

$r'(t_0)$: vector director / pendiente

Noto que aún no sé cuál es "t_0" para mi punto de paso. Busco:

$\begin{cases} 1 + 2\cos(t) = 1 \\ 1 - 2(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) = -1 \\ 2\operatorname{sen}(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow t = \pi/2$ ✓

• Compruebo:

$1 + 2\cos(\pi/2) = 1 + 0 = 1$ ✓

$1 - 2(\operatorname{sen}(\pi/2) + \cos(\pi/2)) = 1 - 2 = -1$ ✓

$2\operatorname{sen}(\pi/2) = 2.1 = 2$ ✓

Ahora ya sé cual es $t_0 = \pi/2$

Me falta sacar la pendiente.

$$r'(t_0) = (2.(-\text{sen}(t_0)),\ -2\cos(t_0) - 2.(-\text{sen}(t_0)),\ 2\cos(t_0))$$

$$r'(\pi/2) = (2.(-\text{sen}(\pi/2)),\ -2\cos(\pi/2) + 2\,\text{sen}(\pi/2),\ 2\cos(\pi/2))$$

$$= (-2,\ 2,\ 0)$$

Finalmente

$$T: \lambda(-2,2,0) + (1,-1,2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2

a) Primero busco un candidato a límite.

Por iterados:

$$\lim_{x \to -1}\left(\lim_{y \to 1} \frac{(x+1)\sin^2(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}\right) = \lim_{x \to -1} \frac{0}{(x+1)^2} = 0$$

$$\lim_{y \to 1}\left(\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)\sin^2(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}\right) = \lim_{y \to 1} \frac{0}{(y-1)^2} = 0$$ Candidato

Si pruebo que por otra curva que pase por el punto $(-1,1)$ tiene un límite diferente no existe el límite. Sin embargo ya probe varias cosas, sospecho que si existe:

- Pruebo por definición

$$\|(x,y)-(-1,1)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{(x+1)\sin^2(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}\right| = \frac{|x+1|\sin^2(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2} = \frac{|x+1|\,\underbrace{|\sin(y-1)|}_{\le|(y-1)|}\,\underbrace{|\sin(y-1)|}_{\le|(y-1)|}}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$\frac{|x+1|\,|y-1|\,|y-1|}{\|(x,y)-(-1,1)\|^2} \le \frac{\|(x,y)-(-1,1)\|^3}{\|(x,y)-(-1,1)\|^2} = \|(x,y)-(-1,1)\| < \delta$$

$|x+1| \le \|(x,y)-(-1,1)\|$

$|y-1| \le \|(x,y)-(-1,1)\|$

- Basta con tomar $\delta \le \varepsilon$

B

Otra forma ...

Teorema del Sandwich $\quad |f(x,y)| \le \|(x,y)-(-1,1)\|$ y como $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

tiene límite $= 0$, forzosamente f tendera a 0 también

B

b) Primero busco un candidato a límite

- Por iterados:

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|y|}\,(x-1)(x+4)}{(x-1)^2+y}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{0}{(x-1)^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{|y|}\,(x-1)(x+4)}{(x-1)^2+y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Candidato

pero si pruebo por la curva $r(t) = (t+1, t^2)$ cumple que $t\to 0 \Rightarrow (1,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\underbrace{\sqrt{t^2}}_{=|t|}\,(t+\cancel{1}-\cancel{1})(t+1+4)}{(t+\cancel{1}-\cancel{1})^2+t^2} = \frac{t^2(t+5)}{t^2+t^2} = \frac{t+5}{2} = \frac{5}{2} \neq 0$$

estás omitiendo $\lim t\to 0^+$

$= |t|$

- No tienden al mismo límite por diferentes caminos, el límite no existe.

B-

(3) Para que f sea diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, debe ser continua en todos sus puntos. Observo que la unica restricción que tiene para posiblemente no ser continua es en $(x,y) \to (0,0)$.

Debo asegurarme que su punto y contorno del punto sea continua, y por ende diferenciable. (la continuidad es condición necesaria, no suficiente).

- Saco las derivadas parciales

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h(1,0)+(0,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{\underbrace{\sqrt{h^2}}_{|h|} \cdot h} = \lim_{h\to 0} \cancel{h^3} \; \frac{h^3}{|h|} = 0 = 0 \Big] \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h(0,1)+(0,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{\sqrt{h^2}\; |h| \cdot h} = \lim_{h\to 0} -h^2 = 0 \Big] \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

- Armo el plano tangente

$$\Pi = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) + f(0,0)$$

$$\Pi = 0$$

Basta con probar que el siguiente límite tiende a 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) \qquad\qquad - T}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^3}{x^2+y^2} = ¿0? \leftarrow \text{Candidato}$$

Intento probarlo por Teorema de Sandwich

$$\left|\frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^4+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^4+|y|^3}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2}{x^2} = \underbrace{\frac{(x^4+|y|^3)\cdot x^2}{x^4+x^2y^2}}_{\leq 1}$$

$|x-y| \leq |x|+|y|$

$|x^4-y^3| \leq |x^4|+|y^3|$

OK!

$$\leq \left(1+\frac{|y|^3}{x^4+x^2y^2}\right)\cdot\frac{x^2}{1} = x^2+\frac{x^2|y|^3}{x^4+x^2y^2} = x^2+\frac{|y|^3}{x^2+y^2}\cdot\frac{y^2}{y^2}$$

$$= x^2+\underbrace{\frac{|y|^4}{y^2x^2+y^4}}_{\leq 1}\cdot y \leq x^2+y$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y=0$ y como $f(x,y) \leq x^2+y$, podemos

afirmar que el límite existe, tiende a 0.

Como $f(0,0)$ es diferenciable, f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

B

4) a) ~~[scribbled out]~~ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = \nabla f(-1,1) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

OK. Esto vale pues f diferenciable.

- Para hallar $\nabla f(-1,1)$ primero debemos hallar sus derivadas parciales evaluadas en el punto

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = \nabla f(-1,1) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

No pude encontrarlas ...

Sólo faltaba plantear el sist. de 2 ec.

INC

$$\begin{cases} 1 = \frac{3}{5} f_x(-1,1) + \frac{4}{5} f_y(-1,1) \\ 0 = \frac{3}{\sqrt{10}} f_x(-1,1) - \frac{1}{\sqrt{10}} f_y(-1,1) \end{cases}$$

resolviendo, llegabas a $\nabla f(-1,1) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

7

b) El plano tiene forma de:

$$\Pi: \frac{\partial g}{\partial s}(1,0)(s-1) + \frac{\partial g}{\partial t}(1,0)(t-0) + g(1,0).$$

- Para encontrar $g(1,0)$, tengo en cuenta:

$g(1,0) = f(-e^0, 1) = f(-1,1) = 12$ aproximadamente, lo sabemos por el límite. (punto f dif $\Rightarrow f$ cont)

$$\lim_{t \to 2} f(e^{t-2} - t, t^3 - 3t - 1) = f(e^0 - 2, 8-6-1) = f(-1,1) = 12$$

- Solo nos falta encontrar $\frac{\partial g}{\partial s}(1,0)$ y $\frac{\partial g}{\partial t}(1,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(x,y)$$

- $\frac{\partial x}{\partial s}(1,0) = t^2 = \boxed{0}$
- $\frac{\partial x}{\partial t}(1,0) = 2t(s+1) - e^t = \boxed{-1}$
- $\frac{\partial y}{\partial s}(1,0) = 2s = \boxed{2}$
- $\frac{\partial y}{\partial t}(1,0) = 2t = \boxed{0}$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(1,0) = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot (-1) + 0$$

$$T1 = \left(2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)(s-1) + \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\right) t + 12$$

B⁻