Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Parcial (01/10/2022) - 2do. cuatrimetre 2022

TEMA 3

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	B/B	B⁼	B	9,5

Apellido: Nro. de libreta: Nro de práctica:

Nombre: Carrera: Nro de hojas: 4

1. Sea C la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(x-1)^2 + z^2 = 4 \text{ y } x + y + z = 2.$$

   (a) Hallar una parametrización de C.

   (b) Hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente a C en el punto $P = (1, -1, 2)$.

---

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)\sin^2(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}$;

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{|y|}\,(x-1)(x+4)}{(x-1)^2+y}$.

---

3. Estudiar la diferenciabilidad en **todo punto** de $\mathbb{R}^2$ para

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

---

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$. Sabiendo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(-1,1) = 1\,,\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(-1,1) = 0 \ \ y \ \ \lim_{t\to 2} f(e^{t-2} - t, t^3 - 3t - 1) = 12.$$

   (a) Hallar $\nabla f(-1,1)$.

   (b) Hallar el plano tangente al gráfico de

$$g(s,t) = f\left(t^2(s+1) - e^t, s^2 + t^2\right)$$

   en el punto $(1, 0, g(1,0))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

Problema 1

a- $(x-1)^2 + z^2 = 4$ ①

$x + y + z = 2$ ②

Despejo y a partir de ② que describe un plano.

$y = 2 - x - z$

① Describe una circunferencia de radio 2 con centro (1,0)

Lo pienso en coordenadas polares: $\begin{cases} x = 2\cos(t) + 1 \\ z = 2\,\text{sen}(t) \end{cases}$ ✓ $t \in \mathbb{R}$

Ahora escribo y de esta forma

$y = 2 - (2\cos(t) + 1) - (2\,\text{sen}(t))$ ✓

RTA: Parametrización de C = $r(t) = (2\cos(t) + 1,\ 2 - (2\cos(t)+1) - (2\,\text{sen}(t)),\ 2\,\text{sen}(t))$ ✓

b- Primero veo para qué valor de t se cumple que $(1,-1,2)$ pertenece a la curva C.

$$\begin{cases} 1 = 2\cos(t) + 1 \\ -1 = 2 - (2\cos(t)+1) - (2\,\text{sen}(t)) \\ 2 = 2\,\text{sen}(t) \end{cases} \Rightarrow t = \pi/2$$ ✓

OBS: $2 - (2\cos(t) + 1) = 1 - 2\cos(t)$

recta tangente genérica = $\lambda r'(t) + r(t)$

calculo ~ $r'(t) = (-2\,\text{sen}(t),\ 2\,\text{sen}(t),\ 2\cos(t))$

$r'(\pi/2) = (-2, 2, 0)$ ✓

RTA: $\lambda r'(\pi/2) + r(\pi/2) =$

$\lambda(-2, 2, 0) + (1, -1, 2)$ ✓

Problema 4

$\lim_{t\to 2} f(e^{t-2}-t, t^3-3t-1) = 12$ por este límite, sé que $f(-1,1)=12$, dado que si hago sustitución directa =

$f(e^{2-2}-2, 2^3-3.2-1) = 12$

$f(-1, 1) = 12$ ✓

u y v son dos vectores unitaria, es decir, $\|u\| = \|(3/5, 4/5)\| = 1$ ✓

y $\|v\| = \|(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})\| = 1$ ✓

(y como f es diferenciable es continua)

Como f es diferenciable (me lo dice el enunciado) y u y v son vectores unitarios, vale que $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = \nabla f(-1,1) . v \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = \nabla f(-1,1) . \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = \nabla f(-1,1) . u \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = \nabla f(-1,1) . \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ✓

Por lo tanto,

$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ y como $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = 0$, me queda =

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) . \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$ ✓

Y por otro lado =

$\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right)\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y como $\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = 1$

$$1 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) . \left(\frac{3}{5}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) . \left(\frac{4}{5}\right)$$ ✓

Tengo que encontrar valores para $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$ de modo que se cumplan ambos casos. (A)

Esto lo hice más adelante (atrás de hoja 2) b_ El plano tangente será

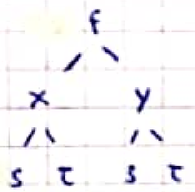
$w = g(1,0) + g_s(1,0)(s-1) + g_\tau(1,0)(\tau - 0)$ ⇒ calculos hechos a continuación.

$w = f(-1,1) + 2(s-1) + (-1/3)\tau$

$w = 12 + 2s - 2 - 1/3\tau$

$\boxed{w = 2s - 1/3\tau + 10}$ RTA = El plano tg al gráfico en $(1,0,g(1,0))$

Para calcular $\frac{\partial g}{\partial s}(1,0)$ y $\frac{\partial g}{\partial \tau}(1,0)$ utilizo la regla de la cadena ⊙



$\frac{\partial g}{\partial s}(1,0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)}_{⊙} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(1,0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)}_{⊙} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(1,0)$

$\frac{\partial g}{\partial \tau}(1,0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)}_{⊙} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau}(1,0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)}_{⊙} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}(1,0)$

⊙ Dado que f es dif y

$g(s,\tau) = f(\underbrace{\tau^2(s+1) - e^\tau}_{x}, \underbrace{s^2 + \tau^2}_{y})$

⊙ obtenido en a.

$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 1/3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 1$

✓ $\frac{\partial x}{\partial s}(1,0) = (\tau^2(s+1) \cdot 1)_{(1,0)} = 0$ ✓ $\frac{\partial x}{\partial \tau}(1,0) = (2\tau(s+1) - e^\tau)_{(1,0)} = -1$

✓ $\frac{\partial y}{\partial s}(1,0) = (2s)_{(1,0)} = 2$ ✓ $\frac{\partial y}{\partial \tau}(1,0) = (2\tau)_{(1,0)} = 0$

Calculo $\frac{\partial g}{\partial s}(1,0)$ y $\frac{\partial g}{\partial \tau}(1,0)$ con todos los datos que tengo

✓ $\frac{\partial g}{\partial s}(1,0) = \frac{1}{3} \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$ $\frac{\partial g}{\partial \tau}(1,0) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -1/3$

④ (continuación del problema 4 a) =

Para simplificar las cosas, llamo $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = b$,

me queda:

① $0 = a\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + b\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ y ② $1 = a \cdot \frac{3}{5} + b \cdot \frac{4}{5}$

$0 = \frac{3a}{\sqrt{10}} - \frac{b}{\sqrt{10}}$ → despejo "b":

$\frac{b}{\sqrt{10}} = \frac{3a}{\sqrt{10}}$

$b = \frac{3a}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10}$

$\Rightarrow b = 3a$

Uso el $b = 3a$ que despejé de ①, me queda:

$1 = \frac{3}{5}a + 3a \cdot \frac{4}{5}$

$1 = \frac{3}{5}a + \frac{12}{5}a$

$1 = 3a$

$1/3 = a$

Por lo tanto, como $b = 3a$, consigo que $b = 1$

RTA: $\nabla f(-1,1) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Problema 2

a - $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{(x+1)\,\text{sen}^2(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}$ Hago un cambio de variable y resuelvo límite equivalente.

Valen las mismas conclusiones para mi límite original.

Llamo $\tilde{x} = x+1$

$\tilde{y} = y-1$ $\Rightarrow$ cuando $(x,y)\to(-1,1)$ $\Rightarrow \begin{cases}\tilde{x}\to 0\\ \tilde{y}\to 0\end{cases}$

De modo que escribo mi límite de esta forma = (y lo resuelvo)

$$\lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)} \frac{\tilde{x}\,\text{sen}^2(\tilde{y})}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}$$

Me aproximo al (0,0) por recta $\tilde{x}=0$

$$\lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)} \frac{\tilde{x}\,\text{sen}^2(\tilde{y})}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} = \lim_{\tilde{y}\to 0} \frac{0\cdot\text{sen}^2(\tilde{y})}{0^2+\tilde{y}^2} = \lim_{\tilde{y}\to 0} \frac{0}{\tilde{y}^2} = \lim_{\tilde{y}\to 0} 0 = 0$$

Creo que el límite es 0, voy a intentar probarlo.

$$0 \le \left|\frac{\tilde{x}\,\text{sen}^2(\tilde{y})}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}\right| = \frac{|\tilde{x}|\,|\text{sen}^2(\tilde{y})|}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} \le |\tilde{x}|\underbrace{\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}}_{\le 1} \le |\tilde{x}|$$

$|\text{sen}(t)| \le |t|$

$|\text{sen}^2(t)| \le |t^2|$

$\tilde{x}^2 \ge 0$ por lo tanto $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2 \ge \tilde{y}^2$ y

$\dfrac{\tilde{y}^2}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} \le 1$ y vale la acotación hecha

Por lo tanto, me queda:

$$0 \le \left|\frac{\tilde{x}^2\,\text{sen}^2(\tilde{y})}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}\right| \le |\tilde{x}|$$

$0 \to 0$, $|\tilde{x}| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Por sandwich, $\lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)} \dfrac{\tilde{x}^2\,\text{sen}^2(\tilde{y})}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} = 0$

RTA:

$\Rightarrow$ Por lo tanto, mi límite original $\exists$ y es $= 0$.

b_ $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sqrt{|y|}\,(x-1)\,(x+4)}{(x-1)^2+y}$

Nuevamente, hago un cambio de variable, llamo

$\tilde{x} = x-1$, cuando $x \to 1$, $\tilde{x} \to 0$.

Escribo mi límite de esta forma =

$$\lim_{(\tilde{x},y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|y|}\;\tilde{x}\cdot(\tilde{x}+5)}{\tilde{x}^2+y}$$

(Aclaración o CA)

Si $\tilde{x} = x-1$

$x+4 = \tilde{x}+5$

Me quedo escrito como

Aproximo por $\tilde{x}=0$

$$\lim_{(\tilde{x},y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|y|}\;\tilde{x}\cdot(\tilde{x}+5)}{\tilde{x}^2+y} =$$

$$= \lim_{y\to0} \frac{\sqrt{|y|}\cdot0\cdot(0+5)}{0^2+y} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

Aproximo por $y=\tilde{x}^2$

$\tilde{x}^2$ es ≥ 0 $\forall \tilde{x}$, por lo tanto $|\tilde{x}^2| = \tilde{x}^2$

$$\lim_{(\tilde{x},y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|y|}\cdot\tilde{x}\cdot(\tilde{x}+5)}{\tilde{x}^2+y} = \lim_{\tilde{x}\to0} \frac{\sqrt{|\tilde{x}^2|}\cdot\tilde{x}\cdot(\tilde{x}+5)}{\tilde{x}^2+\tilde{x}^2} = \lim_{\tilde{x}\to0} \frac{\sqrt{\tilde{x}^2}\cdot\tilde{x}\cdot(\tilde{x}+5)}{2\tilde{x}^2}$$

$$= \lim_{\tilde{x}\to0} \frac{|\tilde{x}|\cdot\tilde{x}\cdot(\tilde{x}+5)}{2\tilde{x}^2} \to \lim_{\tilde{x}\to0^+} \frac{\tilde{x}\cdot\tilde{x}\cdot(\tilde{x}+5)}{2\tilde{x}^2} = \lim_{\tilde{x}\to0^+} \frac{\cancel{\tilde{x}^2}\,(\tilde{x}+5)}{2\cancel{\tilde{x}^2}}$$

$$= \lim_{\tilde{x}\to0^+} \frac{\tilde{x}+5}{2} = \frac{5}{2}$$

Ya puedo ver que si este límite existe también cuando $\tilde{x}\to0^-$ (y es $5/2$), no me da igual a 0.

RTA =

$\Rightarrow$ por 2 curvas $\neq$, el límite me da algo distinto, $\nexists$ lím doble original.

Problema 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y se cumple

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (1)$$

Calculo $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $P = (0,0)$ por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4 - 0^3}{\sqrt{h^2+0^2}} \cdot \frac{1}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^4}{|h|} \cdot \frac{1}{h} \to h: \lim_{h\to 0^+} \lim_{h\to 0^+} \frac{h^4}{h} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^4}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0$$

$$si\ h\to 0^- \cdot \lim_{h\to 0^-} -\frac{h^4}{h} \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^4}{h^2} = \lim_{h\to 0^-} h^2 = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0^4 - k^3}{\sqrt{0^2+k^2}} \cdot \frac{1}{k} = \lim_{k\to 0} -\frac{k^3}{|k|} \cdot \frac{1}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} -\frac{k^3}{|k|} \cdot \frac{1}{k} \to si\ k\to 0^+ = \lim_{k\to 0^+} -\frac{k^3}{k} \cdot \frac{1}{k} = \lim_{k\to 0^+} -\frac{k^3}{k^2} = \lim_{k\to 0^+} -k = 0$$

$$si\ k\to 0^- = \lim_{k\to 0^-} \frac{k^3}{k} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to 0^-} -\frac{k^3}{k^2} = \lim_{k\to 0^-} -k = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Ahora me falta ver que se cumpla (1) (si se cumple, si no, no es dif en (0,0))

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{f_x(0,0)}_{=0}x - \underbrace{f_y(0,0)}_{=0}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \checkmark$$

Tengo $\|(x,y)\|$ 2 veces. $\|(x,y)\|^2 = x^2+y^2$ ✓

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^3}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} 0 \checkmark$$

Lo resuelvo por coordenadas polares: (OBS: $x^2+y^2=r^2$)

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4(\theta) - r^3\operatorname{sen}^3(\theta)}{r^2} = 0$$

$\Rightarrow$ por lo tanto, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$

Falta ver que para todo valor de θ. (por ej acotar)

Por otro lado, veo que $f(x,y)$ es continua también para $(x,y) \neq (0,0)$, dado que es un cociente de polinomios, que no se anula. Es continua en todo su dominio ($\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$) y con denominador

es diferenciable, dado que existen las derivadas parciales.

↳ Es cociente de dos funciones que son diferenciables. ✓

RTA: $f(x,y)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$