1) Sea F_n la sucesión de Fibonacci:
$F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}(n\geq 1)$

a) Sean $a,b\in Z$ no ambos nulos. Probar que para $n\geq 0$ se tiene

$(F_n a+F_{n+1}b:F_{n+1}a+F_{n+2}b)=(a:b)$

n=1

$(a+b:a+2b)=(a:b)$

$d\,|\,a+b$

$d\,|\,a+2b$

$d\,|\,b$

$d\,|\,a$

Suponemos que $(F_n a+F_{n+1}b:F_{n+1}a+F_{n+2}b)=(a:b)$

QVQ $(F_{n+1}a+F_{n+2}b:F_{n+2}a+F_{n+3}b)=(a:b)$

$((F_n+F_{n-1})a+(F_{n+1}+F_n)b:(F_{n+1}+F_n)a+(F_{n+2}+F_{n+1})b)=(a:b)$

$(F_{n+1}a+F_{n+2}b:F_{n+1}a+F_n a+F_{n+2}b+F_{n+1}b)=$

$a\,|\,F_{n+1}a+F_{n+2}b$

$a\,|\,F_{n+1}a+F_n a+F_{n+2}b+F_{n+1}b$

$a\,|\,(F_{n+1}a+F_n a+F_{n+2}b+F_{n+1}b)-(F_{n+1}a+F_{n+2}b)$

$(F_{n+1}a+F_{n+2}b:F_n a+F_{n+1}b)=$

$(a:b)$

Encontrar otra sucesión $G_n\in Z$ tal que:

$(G_n a+G_{n+1}b:G_{n+1}a+G_{n+2}b)=(a:b)\ (n\geq 0)$

$G_0=1$, $G_1=2$, $G_{n+1}=G_n+G_{n-1}(n\geq 1)$

Solo hay que probar n=1, ya que el paso inductivo es exactamente el mismo.

$(a+2b:2a+3b)=(a:b)$

$d\,|\,a+b$

$d\,|\,b$

$d\,|\,a$

2)a) Sea $f\in Q[X]$, $gr(f)=5$ tal que $1+\sqrt{2}$ y $3+\sqrt{3}$ son raíces de *f*. Probar que *f* tiene una raíz racional.

Si $f\in Q[X]$, y $a+\sqrt{b}$ es raíz, $a-\sqrt{b}$ también es raíz. Luego $1-\sqrt{2}$ y $3-\sqrt{3}$ también son raíces. Todas son raíces simples, ya que si fueran dobles, el conjugado también debería serlo y la suma de las multiplicidades de las raíces sería mayor a 5. Luego, falta una raíz, que debe ser racional, ya que si no lo fuera, su conjugado debería ser raíz, y habría 6

raíces.
b) Encontrar un polinomio $g \in Q[X]$ de grado 5 con raíz $1+\sqrt{2}$ pero sin raíces racionales.

$$(x^2-2x-1)(x^3+2)$$
$$(x^5-2x^4-x^3+2x^2-4x-2)$$

(recordar que el conjugado irracional de una raíz cúbica no es el negativo sino los 2 complejos)

3) Probar que si p y q son primos distintos y si a es coprimo con pq
Entonces $a^{[p-1:q-1]}$ es congruente a 1 (mod pq)

$$a^{p-1} \equiv 1(p)$$
$$a^{q-1} \equiv 1(q)$$
$$(a:b)[a:b] = |ab|$$
$$[a:b] = \frac{|ab|}{(a:b)}$$
$$\left(a^{p-1}\right)^{\frac{q-1}{(p-1:q-1)}} \equiv 1(p)$$
$$a^{[p-1:q-1]} \equiv 1(p)$$

4)Dado $k \in N$, $G_k = \{z \in C / z^k = 1\}$. Probar que si n y m son coprimos,
$f: G_n \times G_m \to G_{mn}$
$f(t,s) = ts$ es biyectiva.

$$f(g_n, g_m) = g_n g_m$$
$$g_n \neq g_m$$
$$|g_n g_m| = 1$$
$$Arg(g_n g_m) = Arg(g_n) + Arg(g_m) = \frac{a2\pi}{n} + \frac{b2\pi}{m} = 2\pi\left(\frac{an+bm}{nm}\right)$$
$$(n:m) = 1 \Rightarrow \exists! a,b / an+bm = 1$$
$$an+bm = 1 \leftrightarrow$$
$$k(an+bm) = k$$

Queda una función lineal, biyectiva.

5) Encontrar todos los enteros $0 \le a \le 2400$ que son divisibles por 8, tales que su desarrollo en base 7 tiene al menos 3 dígitos iguales.

Desarrollo en base 7:

$$x = 343a + 49b + 7c + d$$
$$a,b,c,d \le 6$$

Supongamos a=b=c

$$x = 343a + 49a + 7a + d = 399a + d$$
$$r_8(399a) = -r_8(a)$$
$$r_8(d) - r_8(a) = 0$$
$$d = a$$
$$x = 400a$$
Supongamos $a=b=d$
$$x = 343a + 49a + 7c + a = 393a + 7c$$
$$r_8(393a) = r_8(a)$$
$$r_8(7c) = -r_8(c)$$
$$r_8(a) = r_8(c)$$
$$a = c$$
$$x = 400a$$
Supongamos $a=c=d$
$$x = 343a + 49b + 7a + a = 351a + 49b$$
$$r_8(351a) = -r_8(a)$$
$$r_8(49c) = r_8(b)$$
$$r_8(a) = r_8(b)$$
$$a = b$$
$$x = 400b$$
Supongamos $b=c=d$
$$x = 343a + 49b + 7b + b = 343a + 57b$$
$$r_8(343a) = -r_8(a)$$
$$r_8(57c) = r_8(b)$$
$$r_8(a) = r_8(b)$$
$$a = b$$
$$x = 400b$$
$$x = \{400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400\}$$
Y si son todas iguales queda a=400b