10 (diez)

1	2	3	4
B	B	B-	B

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(12/12/06)

NOMBRE Y APELLIDO: Gonzalo Sainz-Trápaga
N° DE LIBRETA: 454/06 N° DE HOJAS ENTREGADAS: 4
e-mail: gomo@datafull.com

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

---

1. **(25 puntos)**
   (a) Enunciar y demostrar la desigualdad de Markov.
   (b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Tchebychev.
   (c) Enunciar y demostrar la Ley de los grandes Números.
   (d) Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la legalización de la marihuana. Se toma una muestra de 50 personas elegidas al azar, se les pregunta si apoyan o no la legalización y se estima p a partir de la frecuencia relativa fr que se define por
   $$fr = \frac{\text{No de personas encuestadas que están a favor de la legalización}}{50}$$
   Hallar una cota superior para $P(|fr - p| > 0.1)$ que no dependa de p.

2. **(25 puntos)** Probar que
   (a) Si X e Y son v.a. independientes con distribución de Poisson de parámetro λ y μ respectivamente, entonces $X + Y$ tiene distribución $P(\lambda + \mu)$.
   (b) Bajo las mismas hipótesis que en a), $X|_{X+Y=k}$ tiene distribución $Bi(k, \lambda/(\lambda+\mu))$.
   (c) Si $X \sim P(\lambda)$ e $Y|_{X=k} \sim Bi(k,p)$, entonces Y tiene distribución $P(\lambda p)$.

3. **(25 puntos)** Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$.
   (a) Hallar $\hat{\sigma}_n^2$, el estimador de máxima verosimilitud de σ^2.
   (b) ¿ Es $\hat{\sigma}_n^2$ es un estimador insesgado de σ^2. Justificar detalladamente.
   (c) ¿ Es $\hat{\sigma}_n$ un estimador consitente de σ? Justificar detalladamente.

4. **(25 puntos)**
   (a) Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$. Cada una mide el tiempo de espera hasta que se produce un llamado de alarma en un sistema de seguridad (medido en horas) en pruebas independientes. Deducir un intervalo de confianza de nivel exacto 0.95 para el tiempo medio de espera hasta que se produzca un llamado de alarma en el sistema basado en la muestra. Justificar.

(b) Sea π la probabilidad de que el tiempo de espera sea superior a una hora. Proponer un intervalo de confianza de nivel 0.95 para π basado en la muestra anterior.

(c) Supongamos que se realizaron las siguientes 10 mediciones y se obtuvieron los siguientes datos:

$$1.50, 0.78, 0.41, 0.06, 0.10, 1.12, 0.12, 0.03, 1.02, 0.40$$

Calcule los intervalos hallados en a) y b) basándose en estos datos.

$S_c \xi_e$

$P(x_c^0 > 1) = \pi.$

ionzalo Sainz - Trápaga
454/06
mail: gomo@datafull.com

Examen Final de Prob. y Est (C)

ercicio 1

a) Sea X una VA / $X>0$, $a>0$

Entonces $P(X>a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Dem (caso X continua), sea f_X la dens. de X

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^a x \cdot f_X(x)\,dx + \int_a^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$\geq \int_a^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx \quad \text{ya que } f_X \text{ y } x \text{ son } >0$$

$$\geq \int_a^{+\infty} a \cdot f_X(x)\,dx \quad \text{ya que en el rango, } a \leq x < +\infty$$

$$= a\int_a^{+\infty} f_X(x)\,dx = a \cdot P(X>a)$$

Luego

$$E(X) \geq a \cdot P(X \geq a) \leftrightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad \text{QED}$$

B

) Sea X una VA cualquiera, $\mu_X = E(X) < \infty$ y $\sigma_X^2 = V(X) < \infty$

Entonces $P(|X-\mu_X| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$

Dem (caso X continua)

Sea $Y = (X-\mu_X)^2$, $Y>0$, $\varepsilon>0$

Por Markov (ver a)) $P(Y > \varepsilon^2) \leq \frac{E(Y)}{\varepsilon^2}$

y $E(Y) = E((X-\mu_X)^2) = \sigma_X^2$, además $Y > \varepsilon^2 \leftrightarrow \sqrt{Y} > \varepsilon$

$\rightarrow$ Luego $P(Y>\varepsilon^2) = P(\sqrt{Y} > \varepsilon) = P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ QED

B

Sean $X_1 \dots X_n$ VAIID con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$ $1 \leq i \leq n$
$\sigma^2 < \infty$, $\mu < \infty$

Entonces $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$

Dem. La prop es equivalente por definición a

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

Por linealidad de la esperanza, es claro que $E(\bar{X}_n) = E(X_i)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{E(X_i)}{n} = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu.$$

Y por propiedades de la varianza, $V(\bar{X}_n) = \frac{V(X_i)}{n}$.

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{n \cdot V(X_i)}{n^2} = \frac{V(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$ por indep. de las

Finalmente aplicamos Chebyshev:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$, pero esta cota tiende a 0 cuando n crece.

Además, por ser una probabilidad, $P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon)$ está acotada inferiormente por 0. Luego su límite es 0. QED

Sea $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = fr$ con $X_i \sim Bi(1,p)$ $E(X_i) = p$
$V(X_i) = p(1-p)$

El fr a analizar es Y_{50}, un promedio de 50 experimentos

$$E(Y_{50}) = \frac{1}{n} \cdot n\, E(X_i) = p \qquad V(Y_{50}) = \frac{p(1-p)}{50}$$

Como $p \in [0,1]$, $V(Y_{50})$ está acotada, ya que es un pol. en p que alcanza un máximo en $p = \frac{1}{2}$

$$q(p) = p(1-p) \cdot \frac{1}{50}, \; q'(p) = [-p^2 + p] \cdot \frac{1}{50}, \; q''(p) = -2p \cdot \frac{1}{50}$$

$$\to q'(\tfrac{1}{2}) = 0 \qquad q''(\tfrac{1}{20}) = -\frac{1}{50}$$

$\to$ Luego $V(Y_{50}) \leq \frac{1}{200}$

Y por Chebyshev:

$$P(|\underset{\uparrow \, E(Y_{50})}{Y_{50} - p}| > \underset{\uparrow \, \varepsilon}{0{,}1}) \leq \frac{1}{200 \cdot \underbrace{(0{,}1)^2}_{\varepsilon^2}} = \frac{1}{2}$$

Finalmente $P(|fr - p| > 0{,}1) \leq \frac{1}{2}$

onzalo Sainz-Trápaga
454 /06

2/4
12/12/06

jercicio 2

a) $X \sim P(\lambda)$, X e Y son independientes
$Y \sim P(\mu)$

$$\rightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \cdot e^{\mu(e^t - 1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t - 1)}$$

Luego M_{X+Y} es la gen. de momentos de una $P(\lambda+\mu)$, y como esta función determina la distribución se puede concluir que.

$X + Y \sim P(\lambda+\mu)$. QED

b) Por definición de prob. condicional tenemos

$Z_k = X|_{X+Y=k}$, solo tiene sentido si $P(X+Y=k) > 0$!

$$p_{Z_k}(z) = P(X = z \mid X+Y=k) = \frac{P(X=z \cap X+Y=k)}{P(X+Y=k)}$$

$$= \frac{P(X=z \cap Y=k-z)}{P(X+Y=k)} \underset{\text{por ind.}}{=} \frac{p_X(z) \cdot p_Y(k-z)}{p_{X+Y}(k)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!} \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^{k-z}}{(k-z)!} \cdot \frac{k!}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k} \cdot \hat{I}(z, k)$$

con $\hat{I}(z,k) = I_{[0,+\infty)}(z) \cdot I_{[0,+\infty)}(k) \cdot I_{[0,+\infty)}(k-z)$

$$= \binom{k}{z} \frac{\lambda^z \mu^k}{(\lambda+\mu)^k \mu^z} \cdot \hat{I}(z,k) = \binom{k}{z} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-z} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-z} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right.$$

$$= \binom{k}{z} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-z} \left[\frac{\lambda \cancel{\mu}}{\cancel{\mu}(\lambda+\mu)}\right]^z \cdot \hat{I}(z,k) = \binom{k}{z} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^z \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-z}$$

Veamos $\hat{I}$:

$P(X+Y=k) > 0 \rightarrow k \geq 0$ siempre

Luego si $z \leq 0$ y $k-z \geq 0$ también $\rightarrow 0 \leq z \leq k$

Finalmente, en este contexto $\hat{I}(z,k) = I_{[0,k]}(z)$

$$p_{Z_k}(z) = \binom{k}{z}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{z}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-z} \cdot I_{[0,k]}(z)$$

$$1 \quad Z_k \sim Bi\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \quad \underline{QED}$$

:) $X \sim P(\lambda)$

$Y \mid X=k \sim Bi(k,p)$

$$P_Y(y) = P(Y=y) = P(Y=y \cap X=0) + P(Y=y \cap X=1) + \dots \quad \text{, event. disjun}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y=y \cap X=i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y=y \mid X=i) \cdot P(X=$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i}{y} p^y (1-p)^{i-y} \cdot I_{[0,i]}(y) \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot p^y}{y!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^{i-y}\,\lambda^i}{(i-y)!} \cdot I_{[0,i]}(y)$$

$i = k+y$

sea $k = i-y$

$0 \leq i \leq +\infty$

$-y \leq i-y \leq +\infty$

$$= \frac{e^{-\lambda}\, p^y}{y!} \sum_{k=\cancel{-y}}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k!} \lambda^{k+y} \cdot I_{[0,k+y]}(y)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^y}{y!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k!} \lambda^k \cdot I_{[0,k+y]}(y) \quad \overset{+\infty}{\uparrow}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^y}{y!} e^{(1-p)\lambda} \cdot I_{[0,+\infty)}(y)$$

$$= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^y}{y!} \cdot I_{[0,+\infty)}(y)$$

Que es la puntual de una $P(\lambda p)$ <u>QED</u>

onzalo Sainz-Trápaga
454/06

ercicio 3

) $X_1 \ldots X_n$ VAIID $\quad X_i \sim N(0, \sigma^2)$

La función de verosimilitud es:

$$L(\sigma^2, \vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) \quad \text{con} \quad f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}$$

Además, como la densidad es positiva, podemos estudiar el logaritmo de esta función para facilitar las cuentas:

$$\tilde{L}(\sigma^2, \vec{x}) = \ln L(\sigma^2, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln \frac{1}{\sigma} - \frac{x_i^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$= -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\tilde{L}'(\sigma^2, \vec{x}) = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma^2} - n \right)$$

B

Maximizamos $\tilde{L}$ (equivale a maximizar L ya que ln es crecient

$$\tilde{L}' = 0 \leftrightarrow \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} = \hat{\sigma}_n^2$$

(asumo que es max, hice algún error con la

~~$\tilde{L}''(\sigma^2, \vec{x}) = \frac{n}{2\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ldots \tilde{L}''(\hat{\sigma}_n^2) = \ldots$~~

$$E(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = E(X_i^2)$$

ya que se trata de un promedio de VAIID.

y $E(X_i^2) = V(X_i) + \underbrace{E^2(X_i)}_{0 \text{ por def.}} = V(X_i)$, por lo tanto $\hat{\sigma}_n^2$ es insesgado.

fórmula de cálculo de la varianza

$\checkmark$

) Más aún, por LGN, $\overline{X} \xrightarrow{P} \mu_X$, en este caso

$$\overline{X_i^2} \xrightarrow{P} E(X_i^2) = \sigma^2$$

Entonces $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ y por lo tanto es un estimador consistente!

Ab verificar que $\hat{\sigma}$ es consistente a σ

Gonzalo Sainz-Trápaga 4/4
u 454/06 12/12/0

Ejercicio 4

a) Tenemos $X_1 \dots X_n$ VAAIID $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$
$E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$

Busquemos un pivote para construir el IC:

$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, y sabemos que con X_i indep.

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

$\leftrightarrow 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2_{2n}$ ✓

Y ahora construimos el IC:

$$P\left(\chi^2_{2n, 0{,}975} \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \chi^2_{2n, 0{,}025} \right) = 0{,}95$$

$$\leftrightarrow P\left(\frac{1}{\chi^2_{2n, 0{,}025}} \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \leq \frac{1}{\chi^2_{2n, 0{,}975}} \right) = 0{,}95$$

(ya que son n. positivos)

$$\leftrightarrow P\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n, 0{,}025}} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n, 0{,}975}} \right) = 0{,}95$$

Finalmente tenemos:

$$IC_{0{,}95}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n, 0{,}025}}, \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n, 0{,}975}} \right] = [A, B]$$

por comodid

B

b) Debemos hallar un IC de nivel 0,95 para $P(X_i > 1)$

$= 1 - P(X_i < 1) = 1 - \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[e^{-\lambda t} \Big|_0^1 \right] = e^{-\lambda} =$

Sabíamos que $[A, B]$ contiene a $\frac{1}{\lambda}$ con prob. 0,95, y son

Luego $\left[\frac{1}{B}, \frac{1}{A}\right]$ contiene a λ con la misma prob.

Y como e^{-x} es biyectiva, podemos decir que

$e^{-\frac{1}{A}} \leq \tilde{p} \leq e^{-\frac{1}{B}} \leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \lambda \leq \frac{1}{B}$, pero esto último t prob. 0,95 ialmente $\left[e^{-\frac{1}{A}} ; e^{-\frac{1}{B}}\right]$ contiene a $\tilde{P}$ con prob 0,95, por ende es el IC que buscamos.

Tenemos 10 datos, cuyo total es 5,54.

$$A = \frac{2 \cdot 5,54}{\chi^2_{20,\,0,025}} = \frac{11,08}{34,170} = 0,3243 \qquad B = \frac{2 \cdot 5,54}{\chi^2_{20,\,0,975}} = \frac{11,08}{9,5908} = 1,155$$

$$e^{-\frac{1}{A}} = 0,0458 \qquad e^{-\frac{1}{B}} = 0,4207$$

nalmente $IC_a = [0,3243 ; 1,155]$ ✓

y $IC_p = [0,0458 ; 0,4207]$ ✓