Solución Tema 1

1.

Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y, y + e^x)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $h = g \circ f$. El polinomio de Taylor de orden 2 de h en $(0,0)$ es:

$$p(x,y) = 2x - y + x^2 + 3xy + 2y^2.$$

(a) Calcular $g(0,1)$ y $\nabla g(0,1)$

(b) Calcular, si existe,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

a) Notemos primero que $f(0,0) = (0,1)$, luego $h(0,0) = g(f(0,0)) = g(0,1)$. Como el polinomio de Taylor coincide con con h en $(0,0)$, tenemos:
$$g(0,1) = h(0,0) = p(0,0) = 0$$
Para calcular $\nabla g(0,1)$ derivamos la expresión $h = g \circ f$ respecto de x y de y usando regla de la cadena:
$$\nabla h(0,0) = \nabla g(f(0,0)) \cdot Df(0,0) = \nabla g(0,1) \cdot Df(0,0) \tag{1}$$
Necesitamos calcular $\nabla h(0,0)$ y $Df(0,0)$. Para el primero, sabemos que las derivadas primeras de h coinciden con las de p en $(0,0)$:
$$\begin{aligned}\nabla p(x,y) &= (2 + 2x + 3y, -1 + 3x + 4y),\\ \nabla h(0,0) &= \nabla p(0,0) = (2,-1)\end{aligned}$$
Por otro lado,
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}, \quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Juntando todo, si llamamos $(a,b) = \nabla g(0,1)$ la igualdad 1 nos queda:
$$(2,-1) = (a,b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (b, -a + b) \Longrightarrow (a,b) = (3,2)$$

b) Si llamamos p_1 al polinomio de Taylor de orden 1 de h en $(0,0)$, podemos escribir $h(x,y) = p_1(x,y) + R_1(x,y)$ donde $R_1(x,y)$ es el resto. El límite que queremos calcular queda:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{p_1(x,y)}{\|(x,y)\|} + \frac{R_1(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

Por propiedad del resto, sabemos que el término con R_1 tiende a cero. Basta ver si existe el límite del término con p_1. Calculemos primero $p_1(x, y)$:

$$\begin{aligned} p_1(x,y) &= h(0,0) + \nabla h(0,0) \cdot (x,y) \\ &= 0 + (2,-1) \cdot (x,y) = 2x - y \end{aligned}$$

El límite nos queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{p_1(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Mirando por la recta $y = x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x \to 0^+ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x \to 0^- \end{cases}$$

Por lo tanto este límite no existe y tampoco existe el límite original.

2.

Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{xy-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$.

(a) Analizar la existencia de máximos y mínimos locales y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Analizar la existencia de extremos absolutos de f en la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

a) Como f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, buscamos puntos críticos mirando dónde se anula ∇f:

$\nabla f(x, y) = (ye^{xy-1} - x, xe^{xy-1} - y)$

$$\begin{cases} ye^{xy-1} - x = 0 \\ xe^{xy-1} - y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} ye^{xy-1} = x \\ xe^{xy-1} = y \end{cases}$$

Si $x = 0$ resulta $y = 0$ y viceversa.
$\to (0, 0)$ es solución.
Supongamos desde ahora que $x, y \neq 0$.

Dividiendo las ecuaciones resulta: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y} \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y = \pm x$

• Si $y = -x \Longrightarrow -xe^{-x^2-1} = x \Longrightarrow -e^{-x^2-1} = 1$ y eso es absurdo.
• Si $y = x \Longrightarrow xe^{x^2-1} = x \Longrightarrow e^{x^2-1} = 1 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
$\Longrightarrow (1, 1), (-1, -1)$ son solución.

Los puntos críticos son: $(0,0),(1,1),(-1,-1)$. Usamos el Criterio del Hessiano para determinar si son o no extremos:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} y^2e^{xy-1}-1 & e^{xy-1}(1+yx) \\ e^{xy-1}(1+yx) & x^2e^{xy-1}-1 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} -1 & e^{-1} \\ e^{-1} & -1 \end{pmatrix}, det(Hf(0,0))=1-\frac{1}{e^2}>0,$$

$$Hf(\pm1,\pm1)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, det(Hf(\pm1,\pm1))=-4<0$$

Por el Criterio, resulta $(0,0)$ máximo local y $(\pm1,\pm1)$ puntos silla.

b) La región D es un disco de radio $\sqrt{2}$. Como es compacto y f es continua, por Weierstrass existen máximo y mínimo absolutos de f sobre D.

Si miramos en el interior de D, los candidatos son aquellos puntos donde se anule ∇f y ya los calculamos antes; el único de esos tres en el interior de D es el $(0,0)$.

Miramos ahora en el borde de D, $\partial D=\{x^2+y^2=2\}$. Definiendo $g(x,y)=x^2+y^2$, el borde se escribe como $\partial D=\{(x,y)\ :\ g(x,y)=2\}$. Usamos Multiplicadores de Lagrange para buscar candidatos sobre ∂D:

$$\nabla g=(2x,2y) \text{ solo se anula en } (0,0), \text{ pero } (0,0)\notin\partial D.$$

Miramos entonces soluciones al sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \\ g(x,y)=2 \end{cases} \quad \begin{cases} ye^{xy-1}-x=\lambda 2x \\ xe^{xy-1}-y=\lambda 2y \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} ye^{xy-1}=x(2\lambda+1) & \text{(I)} \\ xe^{xy-1}=y(2\lambda+1) & \text{(II)} \\ x^2+y^2=2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Si $x=0$, en (I) resulta $y=0$ (y viceversa mirando (II)). Del mismo modo, si $\lambda=-\frac{1}{2}$, de (I) y (II) resulta $x,y=0$. Como $(0,0)$ no satisface (III), lo descartamos.
Supongamos desde ahora que $x,y\neq 0,\lambda\neq-\frac{1}{2}$ (para poder hacer lo siguiente): dividiendo las ecuaciones (I) y (II) queda

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}\Longrightarrow y^2=x^2\Longrightarrow y=\pm x$$

• Si $y=\pm x$, mirando en (III) queda $2x^2=2\Longrightarrow x^2=1\Longrightarrow x=\pm1$. Luego, los candidatos del borde son $(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$.

Evaluamos en f todos los candidatos y comparamos:

$f(0,0)=e^{-1},\quad f(1,1)=f(-1,-1)=0,\quad f(1,-1)=f(-1,1)=e^{-2}-1$

Por lo tanto, $(0,0)$ es máximo absoluto y $(1,-1)$ y $(-1,1)$ son mínimos absolutos de f sobre D.

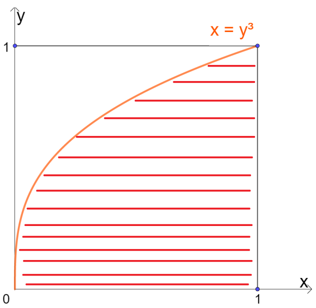
3.

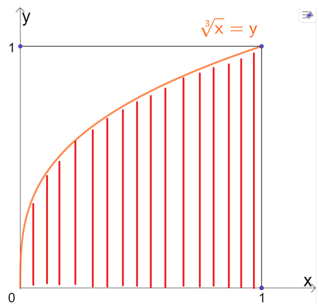
Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^3}^1 y^2 sen(x^2) dx dy.$

(b) $\displaystyle\iiint_E xz\, dV$ donde E es el sólido delimitado por el plano $4x+y+2z=2$ en el primer octante.

a) Como no podemos calcular una primitiva de $sen(x^2)$ respecto de x, cambiemos el orden de integración. Para eso, hay que describir la región como de tipo I:





Tipo II $\longrightarrow$ Tipo I

$0 \leq y \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq x \leq 1$

$y^3 \leq x \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq y \leq \sqrt[3]{x}$

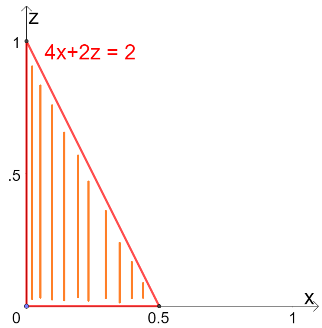
Usando Fubini para cambiar el orden de integración, resulta:

$$\int_0^1 \int_{y^3}^1 y^2 sen(x^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} y^2 sen(x^2) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} sen(x^2) \right) \Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{3} sen(x^2) dx$$

$$\text{(sustituyendo } u = x^2\text{)} \quad = \left(\frac{-cos(x^2)}{6} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{-cos(1)+1}{6}$$

b) En el primer octante tenemos $x, y, z \geq 0$. Despejando y en la ecuación del plano, nos queda $0 \leq y \leq 2 - 4x - 2z$. Veamos entonces cómo se relacionan x, z: en el plano (x, z) (es decir, tomando $y = 0$) la región está delimitada por la recta $4x + 2z = 2$ en el primer cuadrante



$$4x + 2z = 2 \longrightarrow z = 1 - 2x$$

$$0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}$$
$$0 \leq z \leq 1 - 2x$$

Luego, podemos expresar la integral como:

$$\iiint_E xz\ dV = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} \int_0^{2-4x-2z} xzdydzdx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} (xzy)\Big|_{y=0}^{y=2-4x-2z} dzdx = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} xz(2-4x-2z)dzdx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} 2zx(1-2x) - 2xz^2\ dzdx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(z^2x(1-2x) - \frac{2}{3}xz^3 \right)\Big|_{z=0}^{z=1-2x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)^3 - \frac{2}{3}x(1-2x)^3\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}x(1-2x)^3 dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x - 6x^2 + 12x^3 - 8x^4\ dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - 2x^3 + 3x^4 - \frac{8x^5}{5} \right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{240}$$

4.

Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{zx^3}{3} + zy^2x, xy^2e^{x^2}, -2xyze^{x^2} \right).$$

Calcular

$$\iiint_D div(F)dV,$$

donde D es la región encerrada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$.

- Calculemos primero la función

$$div(F) = F_x + F_y + F_z = zx^2 + zy^2 + \cancel{2xye^{x^2}} - \cancel{2xye^{x^2}} = z(x^2 + y^2)$$

- Para calcular la *sombra* de la región sobre el plano (x,y), veamos dónde se intersecan las superficies:

$$\left\{\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 6 - 2(x^2+y^2) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \longrightarrow x^2+y^2 = 6-2(x^2+y^2) \\ \longrightarrow 3(x^2+y^2) = 6 \\ \longrightarrow x^2+y^2 = 2 \end{array}$$

Es decir, el sólido D se escribe como:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 2, \ x^2+y^2 \leq z \leq 6-2(x^2+y^2)\}$$

Haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = rcos(\theta) \\ y = rsen(\theta) \\ z = z \end{array}\right. \text{ la región se describe como } \left\{\begin{array}{l} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 6-2r^2 \end{array}\right.$$

Aplicando el Teorema de Cambio de Variables, la integral queda:

$$\iiint_D z(x^2+y^2)dV(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{6-2r^2} zr^2.r \ dzdrd\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(r^3 \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=r^2}^{z=6-2r^2} dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3((6-2r^2)^2 - (r^2)^2)dr$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} 36r^3 - 24r^5 + 3r^7 \ dr = \pi \left(9r^4 - 4r^6 + \frac{3r^8}{8} \right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 10\pi$$