Álgebra 1 - Primer Parcial - Tema A

20 de Mayo de 2023

(L-Z)

Apellidos: Martínez
Nombres: Fausto Nicolás

Número de Libreta ó DNI: 363/23 45680539

Turno: Mañana 2
Carrera: Lic. Ciencia de Datos

1	2	3	4	Nota
B | B	B	R	R+	7,50

leer consigna

Use hojas distintas para ejercicios distintos. Exhiba todos sus cálculos. Justifique todas sus respuestas. Escriba con tinta y con letra clara y legible.

No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 600\}$. Se define en $\mathcal{P}(X)$ la relación dada por

$$A \mathcal{R} B \iff \#(A \triangle B) \leq 2$$

(a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

(b) Si $B = \{n \in X : n \equiv 2023 \ mod\ 14\}$, calcular el cardinal del conjunto

$$\{A \in P(X) : A \mathcal{R} B\}.$$

Ejercicio 2. Calcular el máximo común divisor para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left(n^4 + 3n^3 - 7n^2 - 27n - 1 : n^2 - n - 6\right)$$

Ejercicio 3. Hallar todos los pares a, b coprimos, $a, b \in \mathbb{Z}$, tales que

$$\frac{4a}{b} - \frac{83a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 4. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ la sucesión definida por recurrencia:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16, \ \ \forall\, n \geq 0.$$

Probar que

$$a_n > 5^n + 3n - 4 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Fausto Martinez - Hoja 1

1) $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 600\}$ y $A \mathcal{R} B \iff \#(A \triangle B) \leq 2$

a) <u>Reflexividad</u> ¿Vale $A \mathcal{R} A \ \forall A \in \mathcal{P}(X)$?

$A \mathcal{R} A \iff \#(A \triangle A) \leq 2$. Como $A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$
y el $\#(\emptyset) = 0$ y $0 \leq 2$, $A \mathcal{R} A \ \forall A \in \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow$ <u>$\mathcal{R}$ es reflexiva</u>

<u>Simetricidad</u> ¿$A \mathcal{R} B$ implica $B \mathcal{R} A$?

$A \mathcal{R} B \iff \#(A \triangle B) \leq 2$. Como sabemos que $A \triangle B$ y $B \triangle A$ son el mismo conjunto, podemos afirmar que
$\#(A \triangle B) = \#(B \triangle A)$, entonces, si $\#(A \triangle B) \leq 2$ por hipótesis, $\#(B \triangle A)$ tambien será ≤ 2,
entonces $B \mathcal{R} A$

$\Rightarrow$ <u>$\mathcal{R}$ es simétrica</u>

<u>Antisimetricidad</u> Con $A \neq B$, ¿vale que $A \mathcal{R} B$ implica $B \not\mathcal{R} A$?

Tomemos $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$, puedo afirmar que:

- $A \mathcal{R} B$, pues $A \triangle B = \{1,2\}$ y $\#(\{1,2\}) \leq 2$
- $B \mathcal{R} A$, pues $B \triangle A = \{1,2\}$ y $\#(\{1,2\}) \leq 2$

Entonces, como $A \neq B$, son un contraejemplo válido.

$\Rightarrow$ <u>$\mathcal{R}$ no es antisimétrica</u>

<u>Transitividad</u> ¿$A \mathcal{R} B$, $B \mathcal{R} C$ implican $A \mathcal{R} C$?

Tomemos $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{3,4\}$, puedo afirmar que

- $A \mathcal{R} B$ pues $A \triangle B = \{1,3\}$ y $\#(\{1,3\}) \leq 2$
- $B \mathcal{R} C$ pues $B \triangle C = \{2,4\}$ y $\#(\{2,4\}) \leq 2$
- $A \not\mathcal{R} C$ pues $A \triangle C = \{1,2,3,4\}$ y $\#(\{1,2,3,4\}) > 2$

Entonces, encontré un contraejemplo

$\Rightarrow$ <u>$\mathcal{R}$ no es transitiva</u>

b) Nos piden calcular la cantidad de conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ que están (o pueden estar) relacionados con $B = \{n \in X : n \equiv 2023 \pmod{14}\}$

Este conjunto es el mismo que $B = \{n \in X : n \equiv 7 \pmod{14}\}$

pues $2023 \equiv 7 \pmod{14}$

Sugerencia: si $n \in B \Rightarrow n = 14x+7$ y $1 \le n \le 600$ pues $n \in X$, luego $1 \le 14x+7 \le 600$ y despejar

por extensión, es el conjunto

$B = \{7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, 119, 133, 147, 161, 175, 189, 203,$
$217, 231, 245, 259, 273, 287, 301, 315, 329, 343, 357, 371, 385, 399,$
$413, 427, 441, 455, 469, 483, 497, 511, 525, 539, 553, 567, 581, 595\}$

y $\#(B) = 43$ ✓ Luego, para que $\#(A \triangle B) \le 2$ puede pasar

$\#(A \triangle B) = 0 \rightarrow$ A tiene los 43 elementos de B y ninguno de fuera $\rightarrow \binom{43}{43} = 1$ caso ✓

$\#(A \triangle B) = 1 \rightarrow$ A tiene 42 elementos de B y ninguno de fuera $\rightarrow \binom{43}{42} = 43$ casos ✓

↳ A tiene los 43 de B y uno fuera de B $\rightarrow \binom{557}{1} = 557$ casos ✓
(Hay $600 - 43 = 557$ elementos fuera de B) ✓
(en X)

$\#(A \triangle B) = 2 \rightarrow$ A tiene 41 elementos de B y ninguno de fuera $\rightarrow \binom{43}{41} = 903$ casos ✓

↳ A tiene 42 elementos de B y uno fuera de B $\rightarrow 43 \cdot 557 = 23951$ casos ✓

↳ A tiene 43 de B y dos de fuera de B $\rightarrow 1 \cdot \binom{557}{2} = 154846$ casos.

Hay, en total, entonces, como todos estos conjuntos o casos son disjuntos:

$1 + 43 + 557 + 903 + 23951 + 154846 =$ ✓ 180 301 conjuntos A

que cumplen $A \in \mathcal{P}(X)$ y ARB Rta ✓

es decir, $\boxed{\#(\{A \in \mathcal{P}(X) : ARB\}) = 180\,301}$

---

2) Llamo d a $d = (n^4 + 3n^3 - 7n^2 - 27n - 1 : n^2 - n - 6)$
por definición del mcd, d divide a ambos

$\Rightarrow d \mid n^4 + 3n^3 - 7n^2 - 27n - 1$
$d \mid n^2 - n - 6$

prop. divisibilidad

$\Rightarrow d \mid n^4 + 3n^3 - 7n^2 - 27n - 1 - n^2(n^2 - n - 6)$
$d \mid \cancel{n^4} + 3n^3 - 7n^2 - 27n - 1 - \cancel{n^4} + n^3 + 6n^2$
$d \mid 4n^3 - n^2 - 27n - 1$

$\Rightarrow d \mid 4n^3 - n^2 - 27n - 1 - 4n(n^2 - n - 6)$
$d \mid \cancel{4n^3} - n^2 - 27n - 1 - \cancel{4n^3} + 4n^2 + 24n$

$\Rightarrow d \mid 3n^2 - 3n - 1$

$d \mid 3n^2 - 3n - 1 - 3(n^2 - n - 6)$
$d \mid \cancel{3n^2} - \cancel{3n} - 1 - \cancel{3n^2} + \cancel{3n} + 18 \Rightarrow d \mid 17$

Fausto Martínez - Hoja 2

$\Rightarrow d \in Div(17)$ y d tiene la forma 17^i con $i \in \{0,1\}$

Para que i sea 1, ambas expresiones del mcd deberían congruir a $0 \pmod{17}$ a la vez, observemos cuando pasa eso

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n^2-n-6	11	11	13	0	6	14	7	2	16	15	16	2	7	14	6	0	13
$n^4+3n^3-7n^2-27n-1$	/	/	/	0	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	0	/

Vemos que ambos congruen a $0 \pmod{17} \Leftrightarrow n \equiv 3 \pmod{17}$ o $n \equiv 15 \pmod{17}$

Rta

$$\Rightarrow \boxed{d = \begin{cases} 17 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{17} \text{ o } n \equiv 15 \pmod{17} \\ 1 & \text{si } n \not\equiv 3 \pmod{17} \text{ y } n \not\equiv 15 \pmod{17} \end{cases}}$$

---

4) $a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16 \quad \forall n \geq 0$

Probar que $a_n > 5^n + 3n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Bueno, vamos a probarlo por inducción

Caso base $m = 0$ $\quad a_0 = 1$ y $5^0 + 3 \cdot 0 - 4 = -3$

$\Rightarrow 1 > -3$ Vale caso base

Hipótesis inductiva Asumo que ~~$a_m > 5^m$~~ $a_m > 5^m + 3m - 4$ (H.I)

inducción global asumo que vale para $\forall k,\ 0 \leq k \leq m,\ a_k > 5^k + 3k - 4$

Paso inductivo Asumiendo H.I, ¿Vale $a_{m+1} > 5^{m+1} + 3(m+1) - 4$

$\Leftrightarrow a_{m+1} > 5^{m+1} + 3m - 1$?

$$\boxed{a_{m+1}} \overset{def.}{=} 4\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right) - 6m^2 + 13m + 16$$

$$\underset{H.I}{>} 4\left(\sum_{k=0}^{m} 5^k + 3k - 4\right) - 6m^2 + 13m + 16$$

$$= 4\sum_{k=0}^{m} 5^k + 4 \cdot 3 \sum_{k=0}^{m} k - 4 \cdot 4 \sum_{k=0}^{m} 1 - 6m^2 + 13m + 16$$

serie
geometrica,
suma de Gauss, etc.

$$\overset{\uparrow}{=} \cancel{4} \cdot \frac{5^{m+1}-1}{\cancel{4}} + \overset{6}{\cancel{12}} \cdot \frac{m(m+1)}{\cancel{2}_1} - 16 \cdot (m+1) - 6m^2 + 13m + 16$$

$$= 5^{m+1} - 1 + 6m(m+1) - 16m \cancel{-16} - 6m^2 + 13m \cancel{+16}$$

$$= 5^{m+1} - 1 + \cancel{6m^2} + 6m - 16m \cancel{-6m^2} + 13m$$

$$= 5^{m+1} + 3m - 1 = \boxed{5^{m+1} + 3(m+1) - 4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_{m+1} > 5^{m+1} + 3(m+1) - 4}$$

Como se quería probar, por el principio de inducción, entonces, vale que

Rta.

$$\boxed{a_n > 5^n + 3n - 4 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0}$$

Fausto Martínez - Hoja 3

ojo si $b \in \{1,-1\}$ $(b:a)=1$ y $b|a$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

3) $\frac{4a}{b} - \frac{83a^2}{b^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4ab-83a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow b^2 | 4ab-83a^2 \Leftrightarrow b^2 | a(4b-83a)$ ✓

Como $b \nmid a$ pues son coprimos, entonces $b^2 \nmid a$

$\Leftrightarrow b^2 | 4b - 83a \Rightarrow b | 4b-83a$ ✓ entiendo que usaste que $b|b^2$

como $b|4b$ $\Rightarrow b | -83a \Rightarrow b|83a$. De nuevo, como $b \nmid a$ por ser coprimos, entonces $b|83$ ✓

Entonces, $b \in Div(83) = \{\pm 1, \pm 83\}$ ✓

Si b es 1 o -1 claramente la expresión será un número entero pues será una resta de enteros (ya que el denominador será 1 o -1). Entonces, aparte como $(1:k)=1$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, es decir 1 es coprimo de cualquier número ✓

$\Rightarrow$ El par $(a,1)$ o $(a,-1)$ hace que la expresión pertenezca a $\mathbb{Z}$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ ✓

Notá que llegaste hasta aquí diciendo que $b \nmid a$ y luego ocurre que $b|a$...

Luego, veamos que pasa si b es 83:

$$\frac{4a}{83} - \frac{83a^2}{83^2} = \frac{4a-a^2}{83} = \boxed{\frac{a(4-a)}{83}}$$ ¿por qué?

Esto pertenece a $\mathbb{Z}$ si $83|a(4-a)$, y como 83 es primo, si $83|a$ o $83|4-a$, vemos que si $83|a$, no estaríamos cumpliendo la condición de que a sea coprimo de b, luego en el otro caso, se cumple si

$$4-a \equiv 0 \pmod{83} \Leftrightarrow a \equiv 4 \pmod{83}$$ ✓

Es decir, que los pares $(m, 83)$ con $m \equiv 4 \pmod{83}$ también cumplen la condición → ∂

Obs. Si $m \equiv 4 \pmod{83}$, m y 83 son coprimos. ✓

y si b es -83

$$\frac{4a}{-83} - \frac{83a^2}{(-83)^2} = -\frac{4a}{83} - \frac{a^2}{83} = \frac{a(-4-a)}{83}$$

Analogamente, si $83|a$ no cumplimos que a sea coprimo de b, y si $83|-4-a$ ✓

$$\Rightarrow -4-a \equiv 0 \pmod{83} \Leftrightarrow a \equiv 79 \pmod{83}$$ ✓

Es decir, que los pares $(k, -83)$ con $k \equiv 79 \pmod{83}$ también cumplen ∂

Rta: Los pares (a,b) que cumplen la condición son

$(n, 1)$ con $n \in \mathbb{Z}$
$(m, -1)$ con $m \in \mathbb{Z}$
$(k, 83)$ con $k \in \mathbb{Z}$, $k \equiv 4 \pmod{83}$
$(l, -83)$ con $l \in \mathbb{Z}$, $l \equiv 79 \pmod{83}$