Tomás Spognardi

1) $f \in C^1$, $g(x,y) = f(\underbrace{3x + e^{xy}}_{u(x,y)}, \underbrace{2x + 4y + \operatorname{sen}(xy^2)}_{v(x,y)})$

Plano tangente de g en $(0,0)$: $-3x + 2y + 4z = 5$

$$z = \frac{3x - 2y + 5}{4} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4} = T(x,y)$$

$$T(0,0) = g(0,0) = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = \frac{3}{4} \;;\; \frac{\partial T}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2} \;;\; \frac{\partial T}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{1}{2}$$

Valen porque $(0,0)$ es el punto en el que $T(x,y)$ es tangente a $g(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3 + y e^{xy} \;;\; \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2 + y^2 \cdot \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x e^{xy} \;;\; \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 4 + 2xy \cdot \cos(xy^2)$$

$f \in C^1 \Rightarrow f$ es diferenciable

u y v son sumas, productos y composiciones de funciones diferenciables $\Rightarrow$ u y v son diferenciables

g es una composición entre funciones diferenciables $\Rightarrow$ g es diferenciable

$\rightarrow$ Vale la regla de la cadena: $\underbrace{u(0,0) = 0 + 1 = 1 \quad v(0,0) = 0+0+0 = 0}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(0,0), v(0,0)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(3+0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot (2+0) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot (4+0) \Rightarrow 4\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -\frac{1}{8}$$

Tomás Spagnardi

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = 3\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) - \frac{1}{4}$$

$$1 = 3\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\nabla f(1,0) = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{8}\right)}$$

2) $f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$

D es la región triangular cerrada con vértices $(0,0)$, $(0,6)$ y $(6,0)$

Sé que la función alcanza máx y mín absolutos gracias al Teorema de Weierstrass, ya que D es cerrado y acotado (está contenida en el disco de centro $(0,0)$ y radio 6).

Los máx y mín absolutos pueden encontrarse en los puntos críticos, donde se anula o no existe el gradiente, de la función o en el borde de D:

- En el interior de D:

Como $f(x,y)$ es un polinomio, es diferenciable en todo su dominio, y entonces $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists \nabla f(x,y)$ $\Rightarrow$ Los PCs son los puntos donde se anula

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 4y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 & (\text{I}) \\ f_y(x,y) = 8xy - 2yx^2 - 3xy^2 = 0 & (\text{II}) \end{cases}$$

$(\text{I}) \Leftrightarrow (4-2x-y)y^2 = 0$

$(\text{II}) \Leftrightarrow (8-2x-3y)xy = 0$

Si $y=0$: $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$, sin importar el x

$\Downarrow$

Todos los puntos de la recta $y=0$ son puntos críticos.

Si $y \neq 0$:

$4-2x-y=0$

$(8-2x-3y)x=0$

Si $x=0$: $f_y=0$

$4-y=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4)$ es PC

Si $x\neq 0$:

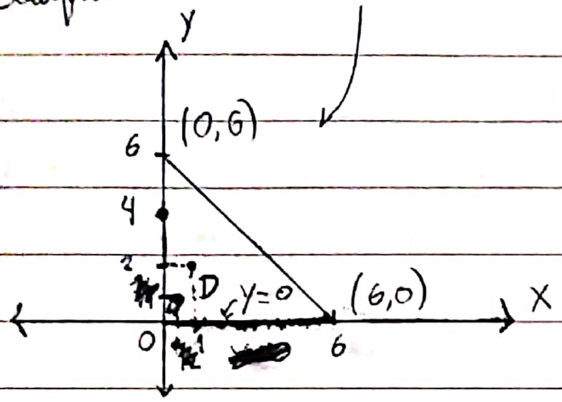
$4-2x-y=0$

$8-2x-3y=0$

$-4+0+2y=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 4-2x-2=0$

$2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,2)$ es PC

Gráfico de D, con los PCs encontrados   Tomás Spaguardi   3/5



En el borde de D:

Está compuesto por 3 segmentos:

- De $(0,0)$ a $(6,0)$; $r(t)=(6,0)\cdot t+(0,0)\cdot(1-t)=(6t,0)$ con t entre 0 y 1

Lo cambio por $r(t)=(t,0)$ con $t\in[0,6]$

$f(r(t))=4t\cdot 0-t^2\cdot 0^2-t\cdot 0^3=0 \Rightarrow$ es siempre $0 \Rightarrow y=0$ es candidato a máx/mín (ya lo era)

- De $(6,0)$ a $(0,6)$; $r(t)=(0,6)\cdot t+(6,0)\cdot(1-t)=(6-6t,6t)$ con $t\in[0,1]$

Lo cambio por $r(t)=(6-t,t)$, con $t\in[0,6]$

$f(r(t))=4(6-t)\cdot t^2-(6-t)^2\cdot t^2-(6-t)\cdot t^3=24t^2-4t^3-36t^2 \; 12t^3 - t^4 \; -6t^3 + t^4$

$=2t^3-12t^2$

Como $f\circ r$ es continua y derivable, sus máx y mín absolutos están en sus PCs o el borde: $(f(r(t)))'=6t^2-24t=0$

$(6t+24)t=0$

$\rightarrow t=0 \Rightarrow (6,0)$ es candidato a máx/mín (ya lo era)

$t=4 \Rightarrow (2,4)$ es candidato a máx/mín

Borde: $r(0)$ y $r(6)$ son candidatos a máx/mín

$(6,0)$ y $(0,6)$

- De $(0,6)$ a $(0,0)$: $r(t)=(0,0)\cdot t+(0,6)(1-t)=(0,6-6t)$, con $t\in[0,1]$

Lo cambio por $r(t)=(0,6-t)$ con $t\in[0,6]$

$f(r(t))=4\cdot 0(6-t)^2-0^2\cdot(6-t)^2-0\cdot(6-t)^3=0 \Rightarrow x=0$ es candidato a máx/mín

Scanned with CamScanner

Tomás Spagnardi

Candidatos:

- Recta $y=0$: $f(x,0)=4x\cdot 0^2-x^2\cdot 0^2-x\cdot 0^3=0$
- Recta $x=0$: $f(0,y)=4\cdot 0\cdot y^2-0^2\cdot y^2-0\cdot y^3=0$
- $(1,2)$: $f(1,2)=4\cdot 1\cdot 2^2-1^2\cdot 2^2-1\cdot 2^3=4 \Rightarrow \boxed{(1,2) \text{ es el máx}}$
- $(2,4)$: $f(2,4)=\underbrace{4\cdot 2\cdot 4^2}_{128}-\underbrace{2^2\cdot 4^2}_{64}-\underbrace{2\cdot 4^3}_{128}=-64 \Rightarrow \boxed{(2,4) \text{ es el mín}}$
- Los otros candidatos están en las rectas $y=0$ y $x=0$

3) $\int_1^2 g(t)\,dt=3$; $f(x,y)=\dfrac{g(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le x\le y\}$

Uso coordenadas polares: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$, con $r>0$ y $\theta\in[0,2\pi)$

$|JT|=r$

$1\le x^2+y^2\le 4$

$1\le r^2\cos^2\theta+r^2\,\text{sen}^2\theta\le 4$

$1\le r^2(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)\le 4$

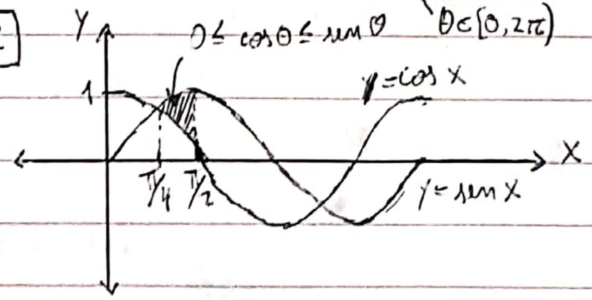
$1\le r^2\le 4 \overset{r>0}{\Longleftrightarrow} \boxed{1\le r\le 2}$

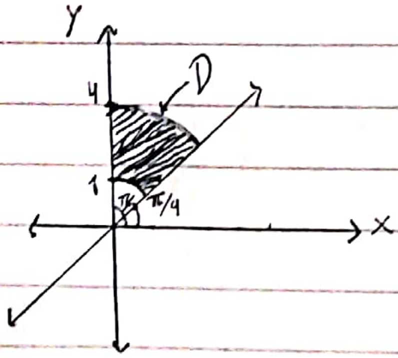
$0\le x\le y$

$0\le r\cos\theta\le r\,\text{sen}\,\theta$

$\Downarrow \leftarrow r>0 \Rightarrow r\neq 0$

$0\le\cos\theta\le\text{sen}\,\theta \overset{\theta\in[0,2\pi)}{\Longleftrightarrow} \boxed{\pi/4\le\theta\le\pi/2}$





$D=\{(r;\theta)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1\le r\le 2,\ \pi/4\le\theta\le\pi/2\}$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)}=r \Rightarrow f(x,y)=\dfrac{g(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{g(r)}{r}$

$$\iint_D F(x,y)\,dA \underset{\substack{\text{cambio}\\ \text{de variables}\\ \text{a polares}}}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_1^2 \frac{g(r)}{\cancel{r}}\cdot\cancel{r}\,dr\,d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\underbrace{\left(\int_1^2 g(r)\,dr\right)}_{\substack{3 \text{ según}\\ \text{el enunciado}}}d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/2}3\,d\theta=3\theta\Big|_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}=\frac{3}{\pi}(\pi/2-\pi/4)=\boxed{\frac{3}{4}\pi}$$

Tomás Spognardi

4) $f(0,0)=0$ y $\nabla f(0,0)=(3,4)$, ~~f es diferen~~

f es diferenciable $\Longleftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-0-3x-4y}{\|(x,y)\|}=0$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, 0<\|(x,y)\|<\delta \rightarrow \left|\dfrac{f(x,y)-3x-4y}{\|(x,y)\|}\right|<\varepsilon}_{\boxed{\text{I}}}$

$\underbrace{\dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}}_{\text{Siempre}>0} = \left|\dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}\right| = \left|\dfrac{f(x,y)-3x-4y+3x+4y}{\|(x,y)\|}\right| = \left|\dfrac{f(x,y)-3x-4y}{\|(x,y)\|}+\dfrac{3x+4y}{\|(x,y)\|}\right| \leq$

Desigualdad triangular

$\leq \left|\dfrac{f(x,y)-3x-4y}{\|(x,y)\|}\right| + \left|\dfrac{3x+4y}{\|(x,y)\|}\right|$

Tomo $\delta_1 / 0<\|(x,y)\|<\delta_1 \Rightarrow \left|\dfrac{f(x,y)-3x-4y}{\|(x,y)\|}\right| < 1$ ($\varepsilon=1$)

(Sé que existe gracias a $\boxed{\text{I}}$)

$\forall (x,y) / 0<\|(x,y)\|<\delta_1$

$\Rightarrow \dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq 1 + \left|\dfrac{3x+4y}{\|(x,y)\|}\right|$

$|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|$ (>0)

(Idem $|y|\leq\|(x,y)\|$)

Por otro lado,

$\left|\dfrac{3x+4y}{\underbrace{\|(x,y)\|}_{\text{Siempre}>0}}\right| = \dfrac{|3x+4y|}{\|(x,y)\|} \underset{\text{Desigualdad triangular}}{\leq} \dfrac{|3x|+|4y|}{\|(x,y)\|} = \dfrac{3|x|+4|y|}{\|(x,y)\|} \leq \dfrac{(3+4)\cancel{\|(x,y)\|}}{\cancel{\|(x,y)\|}} = 7$

$\Rightarrow \dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} < 1 + \left|\dfrac{3x+4y}{\|(x,y)\|}\right| \leq 1+7=8 \Rightarrow \boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0<\|(x,y)\|<\delta_1,\ \dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}<8}$