PROMOCIONA

Nota: 10 (diez)

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B	10

LUCÍA.

APELLIDO Y NOMBRE: CULACIATI DANTE

NO. DE LIBRETA: 351/22

CARRERA: LIC. EN CS. DE LA COMPUTACIÓN

TURNO: Mañana A-K ☑ Mañana L-Z ☐ Noche A-K ☐ Noche L-Z ☐

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2022 - Segundo recuperatorio del segundo parcial - 19/07/2022

---

1. Determinar **todos** los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(24a^{25} - 2a^{19} - 2a : 70) = 14$.

2. Hallar **todos** los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\arg\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{n-1}\right) = \arg(-5) \quad \text{y} \quad \arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{-7n-2}\right) = \arg(i)$$

simultáneamente.

3. Sea $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 2 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

   (a) Hallar las raíces de f en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

   (b) Factorizar f como producto de polinomios irreducibles mónicos en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

4. Factorizar $f = X^4 + 2X^3 - 12X^2 + 2X + 35$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene alguna raíz en común con el polinomio $g = X^4 + X^3 - 10X^2 + 5X + 25$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Dante Colaciati

DNI: 45.428.879

LU: 351/22

HOJA N° 1

FECHA 19/07/22

1) Quiero determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(24a^{25} - 2a^{19} - 2a : 70) = 14$

En primer lugar, escribo a 70 y a 14 como producto de sus factores primos

$$70 = \overbrace{2 \cdot 5 \cdot 7}^{\text{primos}} \qquad 14 = \overbrace{2 \cdot 7}^{\text{primos}}$$

Como el MCD entre dos números es el producto de los primos que aparecen en sus factorizaciones, elevados al menor exponente entre los dos que aparecen (por cada primo), entonces (llamando 'X' a $(24a^{25} - 2a^{19} - 2a)$ por prolijidad y por comodidad), tengo que

$$(X : 2 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 7 \iff \begin{cases} 2 \mid X \\ 7 \mid X \\ 5 \nmid X \end{cases} \quad (\text{para todo } \underline{a \in \mathbb{Z}})$$

$X \in \mathbb{Z}$

no depende de "a" lo que escribiste

Quiero buscar los valores de a tal que valga el sistema de ecuaciones

Para ello, analizo las congruencias módulo 2, 5, y 7 de X

.

módulo 2

$$24a^{25} - 2a^{19} - 2a \equiv 0a^{25} - 0 \cdot a^{19} - 0 \cdot a = 0 \equiv 0 \ (\text{mod } 2) \quad (\forall a \in \mathbb{Z})$$

$\therefore 2 \mid X \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ ✓

módulo 5

$$24a^{25} - 2a^{19} - 2a \equiv -a^{25} + 3a^{19} + 3a \quad (\text{mod } 5)$$

Si $5 \mid a \Rightarrow -a^{25} + 3a^{19} + 3a \equiv -0^{25} + 3 \cdot 0^{19} + 3 \cdot 0 = 0 \equiv 0 \ (\text{mod } 5)$ ✓

Si $5 \nmid a \Rightarrow$ Como 5 es primo, puedo usar PTF ($a^n \equiv a^{r_4(n)}$ (mod 5), en este caso)

Entonces $-a^{25} + 3a^{19} + 3a \equiv -a^{r_4(25)} + 3a^{r_4(19)} + 3a = -a + 3a^3 + 3a = 3a^3 + 2a$ (mod

(Sigue a la vuelta)

NOTA

Pero $3a^3 + 2a \equiv 0 \pmod 5 \iff a(3a^2+2) \equiv 0 \pmod 5$

$\iff \underbrace{a \equiv 0 \pmod 5}$ $\vee$ $3a^2 + 2 \equiv 0 \pmod 5$

(Falso, pues estoy viendo el caso donde $5 \nmid a$) $\iff 3a^2 \equiv 3 \pmod 5 \underset{(3 \perp 5)}{\iff} a^2 \equiv 1 \pmod 5$

Hago una tabla de restos para ver cuándo vale que $a^2 \equiv 1 \pmod 5$

(Esto no ocurre pues, en este caso, $5 \nmid a$) ←

$a \pmod 5$	$a^2 \pmod 5$
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

$\Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod 5 \iff a \equiv 1 \pmod 5 \vee a \equiv 4 \pmod 5$

$\therefore 5 \mid X \iff a \equiv 0 \pmod 5 \vee a \equiv 1 \pmod 5 \vee a \equiv 4 \pmod 5$

<u>módulo 7</u>

$24a^{25} - 2a^{19} - 2a \equiv 3a^{25} + 5a^{19} + 5a \pmod 7$

<u>Si $7 \mid a$</u> $\Rightarrow 3a^{25} + 5a^{19} + 5a \equiv 3 \cdot 0^{25} + 5 \cdot 0^{19} + 5 \cdot 0 = 0 \equiv 0 \pmod 7$

<u>Si $7 \nmid a$</u> $\Rightarrow$ Como 7 es primo, puedo usar PTF ($a^m \equiv a^{r_6(m)} \pmod 7$, en este caso)

Entonces, $3a^{25} + 5a^{19} + 5a \underset{(6 \nmid 7)}{\equiv} 3a^{r_6(25)} + 5a^{r_6(19)} + 5a = 3a + 5a + 5a = 13a \equiv 6a \pmod 7$

Pero $6a \equiv 0 \pmod 7 \iff a \equiv 0 \pmod 7$, lo que es falso pues, <u>en este caso</u>, $7 \nmid a$

$\therefore 7 \mid X \iff a \equiv 0 \pmod 7$

(Sigue en hoja 2)

NOTA

DANTE CULACIATI

Entonces, tengo que

- $2 \mid x \ \forall a \in \mathbb{Z}$

- $5 \mid x \iff a \equiv 0 \pmod 5 \vee a \equiv 1 \pmod 5 \vee a \equiv 4 \pmod 5$

- $7 \mid x \iff a \equiv 0 \pmod 7$

Como quiero que $2 \mid x$ (vale siempre), $5 \nmid x$ (vale si $a \equiv 2 \pmod 5$ v $a \equiv 3 \pmod 5$) y $7 \mid x$ (vale si $a \equiv 0 \pmod 7$), tengo que analizar los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod 7 \\ a \equiv 2 \pmod 5 \end{cases} \quad (1) \qquad y \qquad \begin{cases} a \equiv 0 \pmod 7 \\ a \equiv 3 \pmod 5 \end{cases} \quad (2)$$

Como 7 y 5 son coprimos (en particular, son primos) sé que estos sistemas tienen una única solución módulo $5 \cdot 7 = 35$, por el Teorema Chino del Resto. Resolviendo, tengo que

(1) $a \equiv 0 \pmod 7 \iff a = 7k_1$, para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$.

Entonces, $7k_1 \equiv 2 \pmod 5$. Pero $7k_1 \equiv 2k_1 \pmod 5$

Luego, $2k_1 \equiv 2 \pmod 5 \overset{(2\perp 5)}{\iff} k_1 \equiv 1 \pmod 5 \iff k_1 = 1 + 5k_2$, para algún $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $a = 7(1+5k_2) = 7 + 35k_2 \iff \underline{a \equiv 7 \pmod{35}}$

(2) $a \equiv 0 \pmod 7 \iff a = 7k_1$ para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$

Entonces, $7k_1 \equiv 3 \pmod 5$. Pero $7k_1 \equiv 2k_1 \pmod 5$. Luego, $2k_1 \equiv 3 \pmod 5$

$\iff \overset{\equiv 6}{(2\cdot 3)}\, k_1 \equiv \underbrace{3 \cdot 3}_{=9} \pmod 5 \iff k_1 \equiv 4 \pmod 5 \iff k_1 = 4 + 5k_2$, para algún $k_2 \in \mathbb{Z}$

$(6 \equiv 1 \pmod 5)$

$(9 \equiv 4 \pmod 5)$ (Termino a la vuelta)

NOTA

Por lo tanto, $a = 7(4+5k_2) = 28 + 35k_2 \iff \underline{a \equiv 28 \pmod{35}}$

Finalmente, $\boxed{(24a^{25} - 2a^{19} - 2a : 70) = 14 \iff a \equiv 7 \pmod{35} \vee a \equiv 28 \pmod{35}}$

(Ejercicio 2) en hoja 3)

2) Quiero hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\arg\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{n-1}\right)=\arg(-5) \text{ y } \arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-7n-2}\right)=\arg(i)$$

simultáneamente. (Recordemos que $0 \leq \arg(z) < 2\pi$, $z \in \mathbb{C}$)

En primer lugar, calculo los argumentos de cada número

- $\arg(-5) = \pi$ (Pues $-5 = 5 \cdot e^{\pi \cdot i}$)

- $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ (Pues $i = e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$)

- $\arg\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{n-1}\right) = \frac{(3n-3)}{4}\pi$

$\left(\text{Pues } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = e^{3/4\,\pi i}\right.$, por lo tanto, $\left.\left(e^{3/4\,\pi i}\right)^{n-1} = e^{\frac{(3n-3)}{4}\pi i}\right)$

- $\arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-7n-2}\right) = \frac{(-7n-2)}{6}\pi$

$\left(\text{Pues } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = e^{\frac{1}{6}\pi \cdot i}\right.$. Por lo tanto, $\left.\left(e^{\frac{1}{6}\pi \cdot i}\right)^{-7n-2} = e^{\frac{(-7n-2)}{6}\pi \cdot i}\right)$

(Puedo agregar el $2k\pi$ pues, tomando argumento, por ejemplo, el ángulo π es igual a 3π ó a $-\pi$, es decir, tomo congruencia módulo 2π)

Luego, tengo que

$$\arg\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{n-1}\right)=\arg(-5) \iff \frac{(3n-3)}{4}\pi + 2k\pi = \pi$$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

(Saco factor común π) $\iff \frac{3n-3}{4} + 2k = 1$

NOTA

(Sigue a la vuelta)

$$\iff \frac{3n-3}{4} = 1-2k$$

$$\iff 3n-3 = 4(1-2k)$$

$$\iff 3n = 4-8k+3$$

$$\iff 3n = 7-8k \iff 3n \equiv 7 \pmod{8} \iff \underbrace{3\cdot 3}_{=9}\, n \equiv \underbrace{7\cdot 3}_{=21} \pmod{8}$$

$$\iff n \equiv 5 \pmod{8}$$

$(9 \equiv 1 \pmod{8})$

$(21 \equiv 5 \pmod{8}.$

(ya justifiqué porqué agrego esto).

Por otro lado,

Pongamos $l \in \mathbb{Z}$, porque k ya lo usaste

$$\arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-7n-2}\right) = \arg(i) \iff \frac{(-7n-2)}{6}\pi + 2k\pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

(Saco factor común π) $\leftarrow$ $\iff -\frac{7n-2}{6} + 2k = \frac{1}{2}$

$$\iff -\frac{7n-2}{6} = \frac{1}{2} - 2k$$

$$\iff -7n-2 = 6\left(\frac{1}{2}-2k\right)$$

$$\iff -7n = 3-12k+2$$

$$\iff -7n = 5-12k$$

$$\iff -7n \equiv 5 \pmod{12}$$

$$\iff 5n \equiv 5 \pmod{12}$$

$(5 \perp 12)$

$$\iff n \equiv 1 \pmod{12}$$

(Sigue en hoja 4)

DANTE CULACIATI — HOJA N° 4 — FECHA

~~[illegible]~~

Luego, tengo que $n \equiv 5 \pmod 8$ y $n \equiv 1 \pmod{12}$. Busco la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} n \equiv 5 \pmod 8 \\ n \equiv 1 \pmod{12} \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 5 \pmod 8 \\ n \equiv 1 \pmod 4 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv 5 \pmod 8 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \end{cases} \text{ coprimos}$$

$\left(\begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array} \rightarrow \text{primos (sin el exponente)} \right)$ $\quad$ $\left(n \equiv 5 \pmod 8 \implies n \equiv 1 \pmod 4 \right)$ ✓

Luego, por TCR, como 3 y 8 son coprimos (en particular, son primos y potencia de un primo, respectivamente), tengo que existe una única solución módulo $3 \cdot 8 = 24$. Resolviendo, tengo que

$n \equiv 5 \pmod 8 \iff n = 5 + 8k_1$ para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$

Entonces, $5 + 8k_1 \equiv 1 \pmod 3 \iff 2k_1 \equiv -4 \pmod 3 \iff 2k_1 \equiv 2 \pmod 3$

$(8 \equiv 2 \pmod 3)$ $\quad$ $(-4 \equiv 2 \pmod 3)$

$(2 \perp 3)$

$\iff k_1 \equiv 1 \pmod 3 \iff k_1 = 1 + 3k_2$ para algún $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Luego, $n = 5 + 8(1 + 3k_2) = 13 + 24k_2 \iff \underline{n \equiv 13 \pmod{24}}$ ✓

Finalmente, todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que valen ambas condiciones simultáneamente son los n tales que $n \equiv 13 \pmod{24}$

NOTA

(Ejercicio 3) en hoja 5

Dante Culaciati

HOJA N° 5

FECHA

3) Tengo $f = x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$

a) Quiero hallar sus raíces en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Como $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \underbrace{\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3} \cup \bar{4}}_{\text{(clases de equivalencia módulo 5)}}$, alcanza con tomar un representante

de cada clase, y ver cuándo $f(x) = 0$, con $x \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

Tomo a los números 0, 1, 2, 3 y 4

. $f(0) = 2 \equiv 2 \pmod 5$

. $f(1) = 8 \equiv 3 \pmod 5$

. $f(2) = 24 \equiv 4 \pmod 5$

. $f(3) = 56 \equiv 1 \pmod 5$

. $f(4) = 110 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow f(x) = 0$ sii $x \in \bar{4}$ (En $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$) ✓

* En particular, como $4 \equiv -1 \pmod 5$, tengo que

$f(4) \equiv f(-1) = 0$ (Con -1 da 0 directamente).

en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\bar{4}$ es un único elemento.

Por lo tanto, todos los $x \in \bar{4}$ son raíces de f en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

b) Quiero factorizar a f como producto de irreducibles mónicos en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$

(En $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) (Pues $f(4) = 0$ en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$)

Sé que $(x-4) \mid f$. Aplico Ruffini: (tomando congruencias módulo 5)

	1	2	3	2
4		4	4	8
	1	$\underset{\equiv 1 (5)}{6}$	$\underset{\equiv 2 (5)}{7}$	$\underset{\equiv 0 (5)}{10}$

Luego, $f = (x-4)(x^2 + x + 2)$ (en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$) ✓

Sé que $(x-4)$ es irreducible (en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) pues es de grado 1.

Observo que $x^2 + x + 2$ también es irreducible en

NOTA

$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$, pues, si fuera reducible, dividirlo por $(x-4)$

Debería dar resto 0 ($(x-4)$ podría dividir a x^2+x+2 ~~pues~~ ya que, al ser los $x \in \overline{4}$ las únicas raíces, uno pensaría que podemos escribir a f como $(x-4)^3$, pues f es de grado 3. Pero al ~~expandir~~ hacer la multiplicación, nos damos cuenta de que $(x-4)^3 \neq f$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$)

Pero, aplicando Ruffini (y tomando congruencia)

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 2 \\ 4 & & 4 & 0 \\ \hline & 1 & \underbrace{5}_{\equiv 0 (5)} & 2 \end{array} \longrightarrow ¡2 \not\equiv 0 \ (5)!$$

También se podrían buscar las raíces de x^2+x+2 en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Pero, probando con los mismos números de antes, y por las mismas razones (llamo g a x^2+x+2)

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 2 \equiv 2 \pmod 5 \\ g(1) = 4 \equiv 4 \pmod 5 \\ g(2) = 8 \equiv 3 \pmod 5 \\ g(3) = 14 \equiv 4 \pmod 5 \\ g(4) = 22 \equiv 2 \pmod 5 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ No tiene raíces en } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

Luego, $f = (x-4)(x^2+x+2)$ es la factorización de f como producto de polinomios irreducibles mónicos (son mónicos pues su coeficiente principal es 1) en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$

(Ejercicio 4) en hoja 6)

Ok! Faltaría dejar más en claro que x^2+x+2 es irreducible en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ por ser de grado 2 y no ten

DANTE CULACIATI

HOJA N° 6

FECHA

4) Quiero factorizar a $f = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 2x + 35$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$, sabiendo que tiene alguna raíz en común con el polinomio $g = x^4 + x^3 - 10x^2 + 5x + 25$.

En primer lugar, como ~~ambos~~ f y $g \in \mathbb{Z}[x]$, probé con el método de Gauss y No encontré raíces así que yo sé que ni f ni g tienen raíces en $\mathbb{Q}$.

Como f y g comparten raíces, esas raíces las voy a "encontrar" en $(f:g)$, ~~es decir~~ (su máximo común divisor)

Calculo $(f:g)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 2x + 35 & x^4 + x^3 - 10x^2 + 5x + 25 \\ \hline -\,(x^4 + x^3 - 10x^2 + 5x + 25) & 1 \\ \hline 0 + x^3 - 2x^2 - 3x + 10 & \end{array}$$

$\rightarrow$ (llamo a este resto r_1)

(Como $(f:g) = (g:r_1) = (r_1:r_2) = \cdots = (r_n:0)$, voy calculando hasta tener resto 0).

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - 10x^2 + 5x + 25 & x^3 - 2x^2 - 3x + 10 \\ \hline -\,(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x) & x + 3 \\ \hline 0 + 3x^3 - 7x^2 - 5x + 25 & \\ -\,(3x^3 - 6x^2 - 9x + 30) & \\ \hline 0 \quad -x^2 + 4x - 5 & \end{array}$$

(Sigue a la vuelta)

NOTA

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x + 10 & -x^2 + 4x - 5 \\ \hline -(x^3 - 4x^2 + 5x) & -x - 2 \end{array}$$

$$0 + 2x^2 - 8x + 10$$

$$-(2x^2 - 8x + 10)$$

$$0$$

Por lo tanto, $\dfrac{-x^2 + 4x - 5}{\underbrace{-1}_{\text{(coeficiente principal del polinomio)}}} = \underline{x^2 - 4x + 5}$ es igual a $(f:g)$.

Busco las raíces de $x^2 - 4x + 5$.

$x^2 - 4x + 5 = 0 \iff x = \dfrac{4 + w}{2}$ donde $w^2 = (-4)^2 - 4 \cdot 5$

$w^2 = 16 - 20 \iff w^2 = -4 \iff w = \pm 2i$

Entonces $x = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

Luego, $x^2 - 4x + 5 = (x - (2+i))(x - (2-i))$

Entonces, sé dos cosas sobre f:

se podrían confundir con signos menos, evitarlos!

$\textcircled{1}$ $x^2 - 4x + 5 \mid f$ (pues $(f:g) = x^2 - 4x + 5$ y $(f:g) \mid f$ por definición)

$\textcircled{1}$ $2+i$ y $2-i$ son raíces de f (pues si son raíces de $(f:g)$, necesariamente lo son de f, porque $(f:g) \mid f \wedge (x-(2+i))(x-(2-i)) \mid (f:g) \Rightarrow$ $(x-(2+i))(x-(2-i)) \mid f$).

(Sigue en hoja 7).

NOTA

DANTE CULACIATI.

HOJA N° 7

FECHA

Ahora, divido a f por x^2-4x+5

$$\begin{array}{l} x^4+2x^3-12x^2+2x+35 \quad \underline{|\, x^2-4x+5} \\ -(x^4-4x^3+5x^2) \qquad\qquad\quad x^2+6x+7 \\ \hline 0+6x^3-17x^2+2x+35 \\ -(6x^3-24x^2+30x) \\ \hline 0+7x^2-28x+35 \\ -(7x^2-28x+35) \\ \hline 0 \end{array}$$

Luego, $f=(x^2-4x+5)(x^2+6x+7)$

Busco ahora las raíces de x^2+6x+7

$$x^2+6x+7=0 \iff x=\frac{-6+w}{2} \quad \text{donde } w^2=6^2-4\cdot 7$$

$$w^2=36-28 \iff w^2=8 \iff w=\pm 2\sqrt{2}$$

Entonces $x=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{2}}{2}=-3\pm\sqrt{2}$

Por lo tanto $x^2+6x+7=(x-(-3+\sqrt{2}))(x-(-3-\sqrt{2}))$.

Finalmente, las factorizaciones de f en $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ (como producto de irreducibles) son:

$$\boxed{f=(x-(2+i))(x-(2-i))(x-(-3+\sqrt{2}))(x-(-3-\sqrt{2})) \text{ en } \mathbb{C}[x]}$$

(Al ser todos los factores de grado 1, son irreducibles).

$$\boxed{f=(x^2-4x+5)(x-(-3+\sqrt{2}))(x-(-3-\sqrt{2})) \text{ en } \mathbb{R}[x]}$$

(Al ser los factores de grado 1 $(x-(-3+\sqrt{2}))$ y $(x-(-3-\sqrt{2}))$, o de grado 2

NOTA (Sigue a la vuelta)

Sin raíces en $\mathbb{R}$ ((x^2-4x+5) que tiene raíces complejas no reales conjugadas), son todos los factores irreducibles).

$$\boxed{f=(x^2-4x+5)(x^2+6x+7) \text{ en } \mathbb{Q}[x]}$$

(Al ser todos los factores de grado 2, sin raíces en $\mathbb{Q}$ ((x^2-4x+5) tiene raíces complejas no reales, conjugadas, y (x^2+6x+7) tiene raíces reales no racionales), los factores son irreducibles).