PRIMER PARCIAL ÁLGEBRA I HOJA 1 15/05/2021

MARÍA MARINO, LU: 450/21, CARRERA: LIC. EN CIENCIA DE DATOS, TURNO: 1. (mañana)

1) $\mathcal{F} = \{f: \{1,\dots,10\} \to \{1,\dots,10\} : f \text{ es biyectiva}\}$

$$f \mathcal{R} g \iff \exists n \in \{1,\dots,10\} : f(n) = 1 \wedge g(n) = 1$$

a) REFLEXIVA: sí.

$$f \mathcal{R} f \iff \exists n \in \operatorname{Dom} f : f(n) = f(n) = 1$$

Como f es biyectiva, por definición algún elemento de su dominio debe tener a 1 como imagen, y $f(n) = f(n)$ es una afirmación tautológica.

SIMÉTRICA: sí

$$f \mathcal{R} g \Rightarrow g \mathcal{R} f$$

$$\exists n \in \{1,\dots,10\} : f(n) = g(n) = 1 \Rightarrow \exists m \in \{1,\dots,10\} : g(m) = f(m) = 1$$

Se cumple ya que el antecedente de la implicación indica que existe al menos un elemento cuya imagen en f y en g es igual a uno.

TRANSITIVA: sí

$$f \mathcal{R} g \text{ y } g \mathcal{R} h \Rightarrow f \mathcal{R} h$$

$$\exists n \in \{1,\dots,10\} : f(n) = g(n) = 1 \wedge \exists m \in \{1,\dots,10\} : g(m) = h(m) = 1$$
$$\Rightarrow \exists p \in \{1,\dots,10\} : f(p) = h(p) = 1$$

Se cumple ya que al ser todas funciones biyectivas pertenecientes a $\mathcal{F}$, sólo un elemento del dominio puede tener al uno como imagen. Entonces si $n = m = p$, podemos reescribir la implicación como:

$$\exists n \in \{1,\dots,10\} : f(n) = g(n) = h(n) = 1 \Rightarrow f(n) = h(n) = 1$$

Concluimos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) $Id: \{1,\dots,10\} \to \{1,\dots,10\} : Id(n) = n \;\; \forall n \in \{1,\dots,10\}$

$$\#\{f \in \mathcal{F} : \underbrace{f(\{1,2,3\}) \subset \{1,2,3,4,5\}}_{\text{II}} \wedge \underbrace{f \mathcal{R} Id}_{\text{I}}\}$$

- $f \mathcal{R} Id \iff f(1) = Id(1) = 1$
- Como ya asigné al 1, puedo reescribir la condición II como:

II $f(\{2,3\}) \subset \{2,3,4,5\}$

Tengo que asignar 2 elementos del dominio a 2 elementos del codominio que pertenezcan al conjunto $\{2,3,4,5\}$

Equivalentemente tengo que tomar dos elementos de un conjunto de 4. Hay $\binom{4}{2}$ formas de hacer esto. Y como me importa el orden porque estoy definiendo FUNCIONES debo multiplicar el combinatorio por las permutaciones posibles. Entonces hasta ahora tengo $\binom{4}{2}2!$ formas distintas, sin perder inyectividad.

Por último me queda asignar los 7 elementos restantes del dominio y del codominio de forma biyectiva. Lo puedo hacer de $\binom{7}{7}7!$ formas distintas.

En total:

$$\#\{f \in F : f(\{1,2,3\}) \subset \{1,2,3,4,5\} \text{ y } f \mathcal{R}\, Id\} = \binom{4}{2}2! \cdot \binom{7}{7}7! = \frac{4!\,7!}{2!}$$

---

② $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+a_k}{n+k+1} \quad \forall n \geq 1$$

Probar que $a_n \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

INDUCCIÓN COMPLETA

- Caso base: $a_1 = 1 \leq 1$ ✓
- Paso inductivo:

HI: $a_m \leq m \quad \forall m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq h$

QPQ: $a_{h+1} \leq h+1$

$$a_{h+1} = 1 + \sum_{k=1}^{h} \frac{h+a_k}{h+k+1}$$

Por hipótesis inductiva:

$$1 + \sum_{k=1}^{h} \frac{h+a_k}{h+k+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{h} \frac{h+k}{h+k+1}$$

Alcanza con ver que:

$$\cancel{1} + \sum_{k=1}^{h} \frac{h+k}{h+k+1} \leq h + \cancel{1} \iff \sum_{k=1}^{h} \frac{h+k}{h+k+1} \leq h$$

Como la sumatoria es estrictamente decreciente puedo afirmar que es menor o igual a la suma de su primer término (el más grande) multiplicado por su cantidad de términos.

$$\sum_{k=1}^{h} \frac{h+k}{h+k+1} \leq \sum_{k=1}^{h} \frac{h+1}{h+h+1} = h \underbrace{\frac{h+1}{h+h+1}}_{} \leq h \quad \blacksquare$$

Esto es estrictamente menor a 1 ya que $h+h+1 > h+1$

---

(3)

(a) $n \in \mathbb{N}: 3 \mid 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28$

$3 \mid 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \iff 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \equiv 0\ (3)$

Como $r_3(3\cdot 5^n - 31n^2 + 28) = r_3\left[r_3(r_3(3)\cdot r_3(5^n)) - r_3(r_3(31)\cdot r_3(n^2)) + r_3(28)\right]$

$3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \equiv 0\ (3) \iff 0\cdot 5^n - 1\cdot n^2 + 1 \equiv 0\ (3)$

$\iff n^2 \equiv 1\ (3)$

TABLA DE RESTOS

$r_3(n)$	0	1	2
$r_3(n^2)$	0	1	1

$\Rightarrow n^2 \equiv 1\ (3) \iff n \equiv 1\ (3) \lor n \equiv 2\ (3)$

Concluyo que $3 \mid 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \iff n \equiv 1\ (3) \lor n \equiv 2\ (3)$.

(b) Probar que $3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \equiv 0\ (3) \lor 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \equiv 0\ (31)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Como ya sé que para todo $n \equiv 1\ (3)$ ó $n \equiv 2\ (3)$ al menos una de las proposiciones de la disjunción se cumple, sólo resta probar qué pasa cuando $n \equiv 0\ (3)$.

Obs: ya sé también que $\forall n \in \mathbb{N}: n \equiv 0\ (3)\ 3 \nmid 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28$.

$31 \mid 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \iff 3\cdot 5^n - 31n^2 + 28 \equiv 0\ (31)$

$\iff$ (reemplazo por sus congruencias) $3\cdot 5^n - 0 + 28 \equiv 0\ (31) \iff 3\cdot 5^n \equiv -28\ (31)$

$\iff 3\cdot 5^n \equiv 3\ (31)$

$\iff 5^n \equiv 1\ (31)$

Como sé que $n \equiv 0\ (3) \iff n = 3k$

$5^n = (5^3)^k = 125^k$ y $125^k \equiv 1\ (31)$ ya que $125 \equiv 1\ (31)$

Entonces puedo afirmar que $5^n = 5^{3k} = 125^k \equiv 1\ (31)$ ▨

(4) $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos tales que $5 \mid a$ y $(a:b) = 6$

$d = (2a^2 - b^2 : a^2 - 3b^2)$

• Coprimizo

$\begin{cases} a = 6m \\ b = 6n \end{cases}$ tal que $m \perp n$

Entonces $d = (2\cdot 6^2m^2 - 6^2n^2 : 6^2m^2 - 3\cdot 6^2n^2) = 6^2\underbrace{(2m^2 - n^2 : m^2 - 3n^2)}_{D}$

$d = 6^2 D$

$D = (2m^2 - n^2 : m^2 - 3n^2)$

$\begin{cases} D \mid 2m^2 - n^2 \\ D \mid m^2 - 3n^2 \end{cases} \iff \begin{array}{l} D \mid 2m^2 - n^2 - 2(m^2 - 3n^2) \iff D \mid 5n^2 \\ D \mid 3(2m^2 - n^2) - (m^2 - 3n^2) \iff D \mid 5m^2 \end{array}$

$\begin{cases} D \mid 5n^2 \\ D \mid 5m^2 \end{cases} \iff \quad D \mid 5 \quad \vee \quad (D \mid m^2 \wedge D \mid n^2)$

$\iff D = 1 \vee D = 5$ (sólo tengo en cuenta los divisores positivos porque D es un MCD) | $\iff D = 1$ ya que $m \perp n$

Entonces $D = 1 \quad \vee \quad D = 5$

Recuerdo que $d = 6^2 D$

Entonces $d = 6^2 . 1 \quad \vee \quad d = 6^2 . 5$

PERO $d \neq 6^2 . 5$, ya que el enunciado me dice que $5 \mid a$.

Y si $5 \mid a$ y $(a : b) = 6 \Rightarrow 5 \nmid b$ (porque sino su MCD sería 6.5).

Sabiendo esto puedo afirmar que

$$(2a^2 - b^2 : a^2 - 3b^2) \neq 6^2 . 5$$

ya que el 5 solo "aparecerá" en la factorización prima de a^2 (elevado a una potencia par) y la única forma de que $2a^2 - q$ sea múltiplo de 5 es que q tenga al 5 en su factorización prima. Como sé que b^2 y $3b^2$ no son divisibles por 5, puedo afirmar que

$d = 6^2$.