HOJA Nº

FECHA

2) Probar que vale $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$$

Probamos por inducción: $p(h)$: "$\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{h+k} \leq \frac{5}{6}$"

- Caso base: ¿$p(0)$? $\quad \sum_{k=1}^{1+1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6}$ ✓

- Paso inductivo: ¿$p(h) \Rightarrow p(h+1)$?

$$\sum_{k=1}^{h+1+1} \frac{1}{h+1+k} = \sum_{k=2}^{h+3} \frac{1}{h+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{h+3} \frac{1}{h+k} - \frac{1}{h+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{h+k} - \frac{1}{h+1} + \frac{1}{2h+2} + \frac{1}{2h+3}$$

Queremos ver que:

$$\sum_{k=1}^{h+1} \frac{1}{h+k} - \frac{1}{h+1} + \frac{1}{2h+2} + \frac{1}{2h+3} \leq \frac{5}{6}$$

Por HI, alcanza con probar:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{h+1} + \frac{1}{2h+2} + \frac{1}{2h+3} \leq \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{h+1}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2h+3} \leq 0$$

$$\frac{1}{2h+3} \leq \frac{1}{2h+2}$$

$$\frac{2h+2}{2h+3} \leq 1$$

Vale $\forall\ h \in \mathbb{N}$. Luego, por inducción, probamos que $p(h)$ vale $\forall\ h \in \mathbb{N}$.

NOTA

3) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos, probar que:

$$(a^n b^m : a+b) = 1$$

para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$

Sean las descomposiciones de a y b en factores primos:

$$a = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdots a_p^{\alpha_p} \quad , \quad b = b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdots b_q^{\beta_q}$$

Como a y b son coprimos, $a_i \neq b_j \ \forall \ 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q, i, j \in \mathbb{N}$

Luego: ~~la descomposición de $a^n b^m$ es:~~

$$a^n b^m = a_1^{n\alpha_1} a_2^{n\alpha_2} \cdots a_p^{n\alpha_p} b_1^{m\beta_1} b_2^{m\beta_2} \cdots b_q^{m\beta_q}$$

es una descomposición en factores primos de $a^n b^m$.

Supongamos que $d := (a^n b^m : a+b) > 1$.

Luego $d \mid a^n b^m$.

Luego $d = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \cdots a_p^{\gamma_p} b_1^{\gamma_{p+1}} b_2^{\gamma_{p+2}} \cdots b_q^{\gamma_{p+q}}$, $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i \ (1 \leq i \leq p)$

y $0 \leq \gamma_j \leq \beta_j \ (p+1 \leq j \leq p+q)$

y ~~alg~~ al menos un $\gamma_k \neq 0$.

Luego ~~hay al menos~~ sabemos que al menos hay un a_i o un b_j tal que $a_i \mid d$ o $b_j \mid d$.

- Si $a_i \mid d \Rightarrow a_i \mid a+b$. Pero $a_i \mid a$
  $\Rightarrow a_i \mid b$ ABS
- Si $b_j \mid d \Rightarrow b_j \mid a+b$. Pero $b_j \mid b$
  $\Rightarrow b_j \mid a$ ABS

El absurdo surge de suponer $(a^n b^m : a+b) > 1$

$$\Rightarrow \boxed{(a^n b^m : a+b) = 1}$$