Algebra I
Examen Final (26/07/2017)

Nombre y apellido:

Libreta:

Carrera: Lic en Computación

1	2	3	4	5	Nota
B	B	B	B	B	10

1. Sean $X := \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$ y $U := \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. Pruebe que la relación definida en $\mathcal{P}(X)$ por

$$A \simeq B \text{ si y sólo si } A \setminus U = B \setminus U$$

es de equivalencia y calcule el cardinal de la clase de equivalencia de $A := \{n \in X : 4 \mid n\}$.

2. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_0 = -1$$
$$a_n = 3a_{n-1} + 3^n \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Encuentre una fórmula cerrada para a_n y pruebe su validez.

3. Pruebe que si $m \equiv n \pmod{42}$ entonces $m^m \equiv n^n \pmod 7$ y calcule el resto de dividir $\sum_{n=1}^{297} n^n$ por 7.

4. Sean z y w raíces de la unidad primitivas de órdenes 24 y 20 respectivamente. Halle el $n \in \mathbb{N}$ tal que $z^4 w^2$ es primitiva de orden n.

5. Pruebe que $X^3 - 2X^2 - 4X + 8$ divide a $X^{2n+1} - 2^n X^{n+1} - 2^{n+1} X^n + 2^{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

DANDOIS

1) $X = \{n \in \mathbb{N} \quad n \leq 100\}$ $\quad U = \{n \in \mathbb{N} \quad n \leq 20\}$

$\# X = 100 \qquad \# U = 20$

a) $A \simeq B \iff A \setminus U = B \setminus U$

$(\simeq)$ es de equivalencia, si y solo si, es reflexiva, simétrica y transitiva.

<u>reflexiva</u> $\iff (A \simeq A \quad \forall A)$

$A \simeq A \iff A \setminus U = A \setminus U$ vale $\forall A$

(un conjunto es igual a sí mismo)

<u>Simétrica</u> $\iff (A \simeq B \Rightarrow B \simeq A)$

(la igualdad de conjuntos es simétrica)

$A \simeq B \iff A \setminus U = B \setminus U \iff B \setminus U = A \setminus U \iff B \simeq A$

<u>transitiva</u> $\iff (A \simeq B,\ B \simeq C \Rightarrow A \simeq C)$

$\left.\begin{array}{l} A \simeq B \iff A \setminus U = \boxed{B \setminus U} \\ B \simeq C \iff \boxed{B \setminus U} = C \setminus U \end{array}\right\} \Rightarrow A \setminus U = C \setminus U \iff$

$\iff A \simeq C$

$A = \{ n \in X : 4 | n \}$ $\qquad \# U = 20$

$\frac{100}{4} = 20$ Luego $\# A = 20$

$\frac{20}{4} = 5$ Luego $\#(A \cap U) = 5$

$U \subseteq X$ $\qquad \#(A \setminus U) = 15$

$A = (A \setminus U) \overset{d}{\cup} (A \cap U)$

$A \simeq B \Leftrightarrow A \setminus U = B \setminus U$

Luego B tiene que tener a los 15 elementos de $A \setminus U$ Pero no importa, si tiene alguno de U $\#\mathcal{P}(U) = 2^{20}$

<u>B es de la forma</u>

$B = (A \setminus U) \overset{d}{\cup} C \mid C \in \mathcal{P}(U)$

Luego hay 2^{20} posibles B, es decir

$\boxed{\# \bar{A} = 2^{20}}$

DANDOIS

2) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ / $a_0 = -1$
$a_n = 3a_{n-1} + 3^n$

Construyo una tabla para los primeros valores

n	a_n	a_n	Factorizo	
0	-1	-1	-	$3^0 (0-1)$
1	$3(-1)+3^1$	0	-	$3^1 (1-1)$
2	$3(0)+3^2$	9	3^2	$3^2 (2-1)$
3	$3 \cdot 9 + 3^3$	54	$2 \cdot 3^3$	$3^3 (3-1)$
4	$3 \cdot 54 + 3^4$	243	3^5	$3^4 (4-1)$
5	$3 \cdot 243 + 3^5$	972	$2^2 \cdot 3^5$	$3^5 (5-1)$
6	$3 \cdot 972 + 3^6$	3645	$3^6 \cdot 5$	$3^6 (6-1)$

<u>Hipótesis</u> $a_n = 3^n (n-1) \quad \forall n \geq 0$ (Fórmula cerrada)

· Probémoslo por inducción

Sea $p(n) =$ " $a_n = 3^n (n-1)$ "

<u>$p(0)$ = " $a_0 = 3^0 (0-1)$ "</u> (caso base)

$3^0 (0-1) = 1 \cdot (-1) = -1 = a_0$ luego ~~vale~~
$p(0)$ es verdadera ✓

(<u>PASO inductivo</u>) : $(p(n) \Rightarrow p(n+1)) \iff (a_n = 3^n (n-1) \Rightarrow a_{n+1} = 3^{n+1}(n+1-1))$

Donde mi hipótesis inductiva (HI) es: " $a_n = 3^n (n-1)$ "

$a_{n+1} = 3a_n + 3^n \overset{\text{por HI}}{=} 3(3^n(n-1)) + 3^n =$

$= 3(3^n n - 3^n) + 3^n = 3^{n+1} n \quad 3^{n+1} + 3^n$ Anulado

$= 3^n(3n - 3 + 1)$

$a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1} \overset{\text{por HI}}{=} 3(3^n(n-1)) + 3^{n+1} =$

$= 3^{n+1}(n-1) + 3^{n+1} = \underbrace{3^{n+1}(n-1+1)} = 3^{n+1} n$

Luego vale que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

Fin de inducción, vale $p(n)\ \forall n$. Probamos que

$a_n = 3^n(n-1) \quad \forall n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

DANDOIS

(4) Notación: $G_n^* = \{ w \in G_n \mid w$ es primitiva de orden $n \}$ 3/7

$z \in G_{24}^*$, $w \in G_{20}^*$

Prop $y \in G_n$ es primitiva de orden n $\iff$
$\forall m \in \mathbb{Z}$: $y^m = 1 \Rightarrow n \mid m$

$(z^4)^6 = z^{4 \cdot 6} = z^{24} = 1 \Rightarrow z^4 \in G_6$

~~(w^2) ... $= w^{20}$~~

$(w^2)^{10} = w^{2 \cdot 10} = w^{20} = 1 \Rightarrow w^2 \in G_{10}$

Sea $m \in \mathbb{Z}$, $(z^4)^m = 1 \Rightarrow 24 \mid 4m \Rightarrow 6 \mid m$
como $z \in G_{24}^*$

Luego $z^4 \in G_6^*$

Análogamente: $(w^2)^m = 1 \Rightarrow 20 \mid 2m \Rightarrow 10 \mid m$
como $w \in G_{20}^*$

Luego $w^2 \in G_{10}^*$

Llamo $x = z^4$ y $y = w^2$, para no arrastrar la notación, simplificando el problema a
Sean $x \in G_6^*$, $y \in G_{10}^*$ ¿cuál es el orden yx?

Ahora escribo x, y de la forma exponencial

$x = e^{i \frac{2\pi k}{6}}$ / $k \in \mathbb{Z}$: $(k, 6) = 1$, $0 \le k < 6$

$y = e^{i \frac{2\pi j}{10}}$ / $j \in \mathbb{Z}$: $(j, 10) = 1$, $0 \le j < 10$

$xy = e^{i \left(\frac{2\pi k}{6} + \frac{2\pi j}{10} \right)}$

Miro el exponente (sin el i)

$$\frac{2\pi k}{6} + \frac{2\pi j}{10} = \frac{2\pi 5k + 2\pi 3j}{30}$$

$$= \frac{2\pi(5k+3j)}{30}$$

C.A.

$(6 : 10) = 2$

$[6 : 10] = 30$

Por TFA ([illegible])

Analizo: $(5k + 3j : 30) = d = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$

$d \mid 5k + 3j$ $\quad (k : 6) = 1$

$d \mid 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad (j : 10) = 1$

$0 \le a_1 \le 1$

$0 \le a_2 \le 1$

$0 \le a_3 \le 1$

$(k : 6) = 1 \wedge 2 \mid 6 \Rightarrow 2 \nmid k \Leftrightarrow k \equiv 1_{(2)}$

$(j : 10) = 1 \wedge 2 \mid 10 \Rightarrow 2 \nmid j \Leftrightarrow j \equiv 1_{(2)}$

$5k + 3j \equiv 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1_{(2)} \equiv 0_{(2)} \Leftrightarrow 2 \mid 5k+3j$

Luego, como $2 \mid 5k+3j \wedge 2 \mid 30 \Rightarrow 2 \mid d \Rightarrow d \neq 1$

En resumen $xy \in G_{30} \setminus G_{30}^{*}$

~~Prueba alternativa~~

$(xy)^{30} = \underbrace{x^{30}}_{=1} \underbrace{y^{30}}_{=1} = 1$ pq $x \in G_6 \wedge 6 \mid 30$, $y \in G_{10} \wedge 10 \mid 30$

$(xy)^{30} = \underbrace{x^{30}}_{=1} \underbrace{y^{30}}_{=1} = 1$ pq $x \in G_6 \wedge 6 \mid 30$, $y \in G_{10} \wedge 10 \mid 30$

$\Rightarrow xy \in G_{30}$ (Prueba directa) ~~luego no puede ser primitiva de un conjunto que contenga a 30~~

DANDOIS

~~Prop~~ $G_n \subseteq G_m \iff n \mid m$

~~Como $xy \in G_{30}$ que~~

Supongo $m > 30$

Si $xy \in G_m^*$ ~~entonces~~ $\left((xy)^{30} = 1 \Rightarrow m \mid 30 \right)$

pero $m > 30$ Absurdo

Luego $xy \notin G_m^* \quad \forall m > 30$

$Div_+(30) = \{1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30\}$

~~Tacho los que tienen al dos, al 6 y al 30~~

Sigo analizando d: ~~$\{3, 5, 15\}$~~

$5 \mid 5k \ \wedge\ 5 \nmid 3j$ ya que $(5 : 3) = 1$ $(5 \nmid 3)$

y ~~(...)~~ $(2 \cdot 5 : j) = 1$ $(5 \nmid j)$

5 primo

$\Rightarrow 5 \nmid 5k + 3j$

Análogamente $3 \mid 3j \ \wedge\ 3 \nmid 5k$ ya que $(3 : 5) = 1$ $3 \nmid 5$

y $(2 \cdot 3 : k) = 1$

3 primo, $3 \nmid k$

$\Rightarrow 3 \nmid 3j + 5k$

Luego $d = 2$

$(5k + 3j : 30) = 2 \iff \left(\frac{5k + 3j}{2} : 15 \right) = 1$

Reemplazando en el argumento de xy

~~$\frac{2\pi 5k + 2\pi 3j}{30}$ [illegible]~~ $= \frac{5k + 3j}{[illegible]}$

Reemplazando en el argumento de xy

$$\frac{2\pi\,(5k+3j)}{30} = \frac{2\pi\, 2\left(\frac{5k+3j}{2}\right)}{30} = \frac{2\pi\left(\frac{5k+3j}{2}\right)}{15}$$

tal que $\left(\frac{5k+3j}{2} : 15\right) = 1$

Luego xy es primitiva de orden 15

Luego Rta: $z^4 w^2$ es primitiva de orden 15

DANDOIS

3 Tesis a Probar: $m \equiv n_{(42)} \Rightarrow m^m \equiv n^n_{(7)}$ 5/7

$42 = 6 \cdot 7$, $(6:7) = 1$ $6 \mid 42 \wedge 7 \mid 42$

~~Luego por~~ TCR Prop $a \equiv b \wedge d \mid m \Rightarrow a \equiv b\,(d)$

$m \equiv n_{(42)} \Rightarrow m \equiv n_{(7)}$

$\Rightarrow m \equiv n\,(6)$

(A)

CASO FÁCIL $m \equiv n \equiv 0 \quad (7)$ ($m, n \neq 0$) (pues 0^0 [illegible])

$$\left.\begin{array}{l} m^m \equiv 0^m_{(7)} \equiv 0_{(7)} \\ n^n \equiv 0^n_{(7)} \equiv 0_{(7)} \end{array}\right\} \Rightarrow m^m \equiv n^n_{(7)}$$

OTRO CASO $m \equiv n \not\equiv 0_{(7)}$

Por PTF (consecuencia)

$m^m \equiv m^{r_6(m)}\ (7)$

$n^n \equiv n^{r_6(n)}\ (7)$

Pero $m \equiv r_6(m)\ (6)$

$n \equiv r_6(n)\ (6)$

Por transitividad, como $m \equiv n\,(6)$

$r_6(m) \equiv r_6(n) \Rightarrow (0 \leq r_6(m), \leq r_6(n) \leq 6)$

$r_6(m) = r_6(n) = r$

Entonces $m^m \equiv m^r_{(7)} \underset{(m \equiv n\,(7))}{\equiv} n^r \equiv n^n_{(7)}$

$n^n \equiv n^r\ (7)$

Hemos probado la propiedad

Calcular
$$\sum_{n=1}^{297} n^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{294} n^n}_{A} + \underbrace{\sum_{n=295}^{297} n^n}_{B}$$

C A $\quad 297 = \underbrace{42 \cdot 7}_{294} + 3$

Analizo A mod 42

Como $294 = 42 \cdot 7$, los $n \mid 1 \leq n \leq 294$ recorren los 42 restos posibles 7 veces. Es decir

$\forall 0 \leq r < 42$: $\#\{n \mid n \in \bar{r},\ 1 \leq n \leq 294\} = 7$ | $\bar{r}$ clase de equivalencia de r mod 42

Luego A $= \sum_{n \in \bar{1}} n^n + \sum_{n \in \bar{2}} n^n + \sum_{n \in \bar{3}} n^n + \dots + \sum_{n \in \bar{0}_{42}} n^n$

Por lo prop demostrado, $m \equiv r_{(42)} \Rightarrow m^m \equiv r^r_{(42)}$

A $\equiv_{(7)} \sum_{n \in \bar{1}} 1^1 + \sum_{n \in \bar{2}} 2^2 + \sum_{n \in \bar{3}} 3^3 + \dots + \sum_{n \in \bar{42}} 42^{42}$ ~~$\bar{0}$~~

~~Acá tenemos las~~

Aclaración: $n \equiv 0_{(7)} \Rightarrow n^n \equiv 0_{(7)}$ Lo defino de esta forma para no tener problemas con el caso 0^0. (Notar que $n \geq 1$)

A $\equiv_{(7)} 7 \cdot 1^1 + 7 \cdot 2^2 + 7 \cdot 3^3 + \dots + 7 \cdot 6^6 + \underbrace{7 \cdot 1^1 + \dots + 7 \cdot 6^6}_{?}$
$= 0 + 0 + \dots + 0 \quad (7)$

Luego A $\equiv 0 \ (7)$

DANDOIS

6/7

$$(B) = \sum_{i=295}^{297} i^{i} = 295^{295} + 296^{296} + 297^{297}$$

$295 \equiv 1_{(42)}$ [illegible] $\Rightarrow 295^{295} \equiv 1^{1}_{(7)}$

$296 \equiv 2_{(42)} \Rightarrow 296^{296} \equiv 2^{2}_{(7)} \equiv 4_{(7)}$

$297 \equiv 3_{(42)} \Rightarrow 297^{297} \equiv 3^{3}_{(7)} \equiv 6_{(7)}$

$(B) \equiv_{(7)} 1 + 4 + 6 \equiv 4_{(7)}$

$(A) + (B) \equiv_{(7)} 0 + 4 \equiv \boxed{4_{(7)}}$

DANDOIS

5) Sea $f = x^{2n+1} - 2^n x^{n+1} - 2^{n+1} x^n + 2^{2n+1}$ 7/7

$g = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

$g(2) = 8 - 8 - 8 + 8 = 0 \iff x-2 \mid g$

$g(-2) = -8 - 8 + 8 + 8 = 0 \iff x+2 \mid g$

Divido por Ruffini:

	1	-2	-4	8
2		2	2	-8
	1	0	-4	$\lfloor 0$
-2		-2	4	
	1	-2	$\lfloor 0$	

$g = (x-2)(x-2)(x+2)$
$= (x-2)^2(x+2)$

$f(2) = 2^{2n+1} - 2^n 2^{n+1} - 2^{n+1} 2^n + 2^{2n+1}$
$= 2^{2n+1} - 2^{2n+1} - 2^{2n+1} + 2^{2n+1}$
$= 0 \ \forall n$

Luego $x-2 \mid f$

$f(-2) = (-2)^{2n+1} - 2^n (-2)^{n+1} - 2^{n+1} (-2)^n + 2^{2n+1}$
$= (-1)^{2n+1} 2^{2n+1} - (-1)^{n+1} 2^{2n+1} - (-1)^n 2^{2n+1} + 2^{2n+1}$

Si $n \equiv 0 \ (2)$

$f(-2) = -2^{2n+1} + 2^{2n+1} - 2^{2n+1} + 2^{2n+1} = 0$

Si $n \equiv 1 \ (2)$

$f(-2) = -2^{2n+1} - 2^{2n+1} + 2^{2n+1} + 2^{2n+1} = 0$

En cualquier caso, $x+2 \mid f$

$f' = (2n+1)\, x^{2n} - 2^n (n+1)\, x^n - 2^{n+1} n\, x^{n-1}$

$f'(2) = (2n+1)\, 2^{2n} - 2^n (n+1) 2^n - 2^{n+1} n\, 2^{n-1}$

$= 2^{2n+1} n + \cancel{2^{2n}} - n 2^{2n} - \cancel{2^{2n}} - n 2^{2n}$

$= 2^{2n+1} n - 2 n 2^{2n}$

$= n\, 2^{2n+1} - 2^{2n+1} n = 0$

$f(2)=0 \wedge f'(2)=0 \iff \mathrm{mult}(2,f) \geq 2 \iff$
$(x-2)^2 \mid f$

Como $x+2 \mid f \wedge (x-2)^2 \mid f$ y $((x+2) : (x-2)^2) = 1$,

vale que $\underbrace{(x-2)^2 (x+2)}_{g} \mid f$

$\Rightarrow$ $g \mid f$ como se quería probar