1	2	3	4	Calificación
23	13	18	20	74

A felicitaciones!

TEMA 1

Probabilidad y Estadística (C)

Recuperatorio del segundo parcial - 20/07/2016

Complete esta hoja y entréguela con el resto del examen. ***Realizar cada ejercicio en hoja separada.*** *Escribir el n... ...arse ...en. Al retirarse debe firmar una hoja de astener*

APELLIDO Y NOMBRE: ... debe ... resto ... N° DE LIBRETA: ...

mail ... @ ... debe ... FIRMA: ... /2016

Turno: ~~Tarde: 14 a 17 hs~~ | Noche: 19 a 22 hs   N° de hojas entregadas: 5

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen es necesario sumar al menos 60 puntos o tener al menos dos ejercicios bien resueltos.

Recuerde definir con palabras los eventos y/o las variables aleatorias involucradas, nombres y parámetros de las distribuciones. ***Justifique claramente sus afirmaciones.***

1. (*25 puntos*) La rana Anastasia duerme todos los días en un pozo de un metro de profundidad. Cada noche intenta saltar fuera del pozo. Si al segundo salto no logra salir, Anastasia decide quedarse descansando en el pozo hasta la noche siguiente. Si logra salir, al día siguiente vuelve al pozo y por la noche repite el procedimiento. Las alturas en metros de los distintos saltos de la rana tienen distribución exponencial de media 0.5 y son independientes.

a) (*5p*) Sea X la variable aleatoria que indica la cantidad de saltos que hace Anastasia en un día. Hallar la función de probabilidad puntual de X.

b) (*10p*) Aproximar la probabilidad de que en 80 días, Anastasia haya dado más de 140 saltos.

c) (*10p*) ¿Cuántos días deberían transcurrir aproximadamente para que la rana pueda salir del pozo más de 40 veces con probabilidad superior a 0.99? (*Cuidado:* nos está interesando calcular la cantidad de días y no la cantidad de saltos.)

2. (*20 puntos*) El número de estudiantes que se reciben en Ciencias de la Computación en la FCEyN es un proceso de Poisson con tasa igual a 3 estudiantes por mes.

a) (*7p*) Sabiendo que en los dos primeros meses se recibieron exactamente 5 estudiantes, hallar la probabilidad de que el primer mes se haya recibido un número impar de estudiantes.

b) (*6p*) Hallar la probabilidad de que el segundo estudiante recibido se gradúe en el segundo mes. (Del primero no se sabe nada, con lo cual se pudo haber recibido en el primer o segundo mes)

c) (*7p*) Cada recibido tiene probabilidad 1/10 de ser mujer y 9/10 de ser hombre. Sabiendo que al cabo de dos meses se recibió exactamente una mujer, hallar la probabilidad de que al cabo de dos meses se reciban exactamente 4 hombres.

Aclaración: para ítems *b)* y *c)* no asumir la hipótesis del ítem *a)* que dice que en los dos primeros meses se recibieron exactamente 5 estudiantes.

3. (*30 puntos*) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x;\mu) = 5\mu x^4 e^{-\mu x^5} I_{(0,+\infty)}(x), \quad \mu > 0.$$

a) (*8p*) Probar que el estimador de máxima verosimilitud de μ está dado por

$$\widehat{\mu}_{MV} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^5}.$$

b) (*8p*) Sea $\beta = \dfrac{1}{\mu}$ y sea $\widehat{\beta}_{MV}$ el estimador de máxima verosimilitud de β. Probar que la distribución de $\widehat{\beta}_{MV}$ es $\Gamma(n, n/\beta)$.

c) (*4p*) ¿Es $\widehat{\beta}_{MV}$ un estimador insesgado o asintóticamente insesgado de β? ¿Es consistente a β?

d) (*10p*) Construir un intervalo de confianza de nivel exacto (1-α) para β basado en el estimador de máxima verosimilitud $\widehat{\beta}_{MV}$. Hallar un intervalo de confianza de nivel 90% para β si se tomó una muestra de tamaño $n = 15$ para la cual se obtuvo $\sum\limits_{i=1}^{15} X_i^5 = 12{,}8$.

Sug 1: Propiedad de Invarianza de los EMV: Sea $\widehat{\theta}_{MV}$ el estimador de máxima verosimilitud de θ y sea h una función inyectiva con dominio en el rango de valores posibles de θ, entonces el estimador de máxima verosimilitud de $h(\theta)$ es $h(\widehat{\theta}_{MV})$.
Sug 2: Podría ser útil probar que la distribución de $Y = X^5$ es exponencial de parámetro μ, siendo X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x;\mu)$.
Sug 3: Si lo necesita, puede usar sin probar que:

i) $Y_1, \ldots, Y_n$ muestra aleatoria con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$ entones $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$,

ii) $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ y $c > 0$ entonces $cZ \sim \Gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{c}\right)$, $E(Z) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $V(Z) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$,

iii) $\Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_m$, $m \in \mathbb{N}$.

4. (*25 puntos*) En un laboratorio el peso medio poblacional de los ratones es de 15 gramos. Un día, un investigador cometió un error y les dio una ración extra de comida a todos los ratones. El jefe del laboratorio, enojado, dice que va a echar al investigador si hay evidencia empírica de que el peso medio poblacional de los ratones haya aumentado (se sabe que dicho peso medio no puede haber disminuido después de la ración extra). Como llevaría mucho tiempo volver a pesarlos a todos después de la ración extra, el jefe decide tomar a 15 ratones al azar y pesarlos. El promedio muestral que obtiene es 17 gramos y el desvío estándar muestral es de 4 gramos. Se sabe también que los pesos de los ratones (tanto antes como después de la ración extra) siguen una distribución normal con media y varianza desconocidas.

a) (12p) Plantear un test de hipótesis para esta situación, si se quiere que la probabilidad de que el jefe eche al investigador cuando en realidad el peso medio no aumentó (error de tipo 1) sea **exactamente** 0.05. Recordar definir con cuidado las variables involucradas con su distribución, las hipótesis a testear, el estadístico del test, su distribución bajo la hipótesis nula y la región de rechazo. ¿Qué decisión se toma en este caso?

b) (6p) Haciendo uso de la tabla adecuada a este caso, acotar superior e inferiormente el p−valor. Hallar todos los valores de α para los cuales esté seguro que se rechaza la hipótesis nula a nivel α.

c) (7p) Construir un intervalo de confianza de nivel 0.90 para el verdadero peso medio de los ratones luego de la ración extra. ¿Cuál es el intervalo observado para esta muestra?

23

HOJA N° 1

FECHA 20/07/16

1. A_i: "Altura (en metros) a la que salta la rana en el salto i"

$A_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad \mathbb{E}(A) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 2$ ✓ $\quad Var(A) = \frac{1}{4}$

$A_1, \dots, A_n$ son independientes, osea i.i.d, (ya que tienen la misma distribución)

↳ pero sólo saltó 2 veces

a) X: "# de saltas que hace Anastasio en 1 día"

R_x: {1, 2} Como el pozo tiene 1 metro de alto, busco la probabilidad de que salte en el primer salto más de un metro.

5

$P_x(1) = \mathbb{P}(A_1 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \leq 1) = 1 - (2 e^{-2}) \approx 1 - 0.135 = 0.865$ No, mal usada la distribución ¿?

$P_x(2) = \mathbb{P}(A_1 \leq 1) = 2 e^{-2} \approx 0.135$ No te daba esto

X	1	2
$P_x(x)$	0.865	0.135

↳ están al revés!

b) Por TCL se que $\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X) \cdot n\right)}{\sqrt{n \, Var(X)}} \xrightarrow[\text{aprox}]{d} Z \sim N(0,1)$

Arrastrás error.

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0.865 + 2 \cdot 0.135 = 1.135$

$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0.865 + 2^2 \cdot 0.135 = 1.405$

40

Además,

con $n = 80$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1.405 - (1.135)^2 = 1.405 - 1.288 = 0.117$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{80} X_i > 140\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - 1.135 \cdot 80}{\sqrt{80 \cdot 0.117}} > \frac{140 - 1.135 \cdot 80}{\sqrt{80 \cdot 0.117}}\right)$

POR TCL

$\approx 1 - \mathbb{P}(Z \leq 16) = 0$

Bien planteado.

NOTA

c) D_i: "Anastasio roba del pozo en el día i"   si $D=1 \Rightarrow$ Anastasio robó

$D_1, \dots, D_n$ iid

$D_i \sim Be(p)$

$$p = \mathbb{P}(D=1) = \mathbb{P}(A_1 \geq 1) + \mathbb{P}(A_2 \geq 1 \mid A_1 \leq 1)\,\mathbb{P}(A_1 < 1)$$

$$= 0.865 + 0.135 * 0.865 = 0.982 = p$$

Mismo error.

$$\Rightarrow D_i \sim Be(\underset{0.982}{p}) \quad \mathbb{E}(D) = 0.982 \quad Var(D) = 0.0177$$

Por TCL se lo mismo que antes, (b)

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i > 40\right) > 0.99$$

$$\overset{\text{Por TCL}}{\Rightarrow} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i - n\,0.982}{\sqrt{0.0177\,n}} > \frac{40 - 0.982\,n}{\sqrt{0.0177\,n}}\right) \approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{40 - 0.982\,n}{\sqrt{0.0177\,n}}\right)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{40 - 0.982\,n}{\sqrt{0.0177\,n}}\right) > 0.99 \iff 0.01 > \phi\left(\frac{40 - 0.982\,n}{\sqrt{0.0177\,n}}\right)$$

$$\iff -2.33 > \frac{40 - 0.982\,n}{0.133\sqrt{n}} \iff 0.982\,n - 0.31\sqrt{n} - 40 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{0.31 \pm \sqrt{(0.31)^2 - 4 * 0.982 * (-40)}}{2 * 0.982} \nearrow \sqrt{n} > 6.55 \iff n > 42.9$$

$$\boxed{n = 43}$$

Bien planteado

10/10

2. E_t: "# de egresados en t meses"

$E_t \sim P(3t)$

a) $\mathbb{P}(\{E_{[0,1]}=1\} \cup \{E_{[0,1]}=3\} \cup \{E_{[0,1]}=5\} \mid E_{[0,2]}=5)$

3/7 $= \dfrac{\mathbb{P}((\{E_{[0,1]}=1\} \cup \{E_{[0,1]}=3\} \cup \{E_{[0,1]}=5\}) \cap \{E_{[0,2]}=5\})}{\mathbb{P}(E_{[0,2]}=5)}$

✓ NO son indeptes.

Por ser de Poisson Procesos son independientes $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathbb{P}(\{E_{[0,1]}=1\} \cup \{E_{[0,1]}=3\} \cup \{E_{[0,1]}=5\}) \cdot \cancel{\mathbb{P}(E_{[0,2]}=5)}}{\cancel{\mathbb{P}(E_{[0,2]}=5)}}$ NO

$\Rightarrow \mathbb{P}(E_{[0,1]}=1) + \mathbb{P}(E_{[0,1]}=3) + \mathbb{P}(E_{[0,1]}=5)$ como $E_{[0,1]} \sim P(3)$

$\Rightarrow 3e^{-3} + \dfrac{3^3 e^{-3}}{3!} + \dfrac{3^5 e^{-3}}{\underset{=120}{5!}} = 0.149 + 0.224 + 0.101 = \boxed{0.474}$

No...

b) Los T_i (tiempos entre arribos) de un proceso de Poisson ~~son~~ están distribuidos como una $\mathcal{E}(\lambda)$, en este caso $T_i \sim \mathcal{E}(3)$

$\mathbb{P}(T_2 \in [1,2]) = \int_1^2 3e^{-3x}\,dx = 3\left(-\dfrac{e^{-3x}}{3}\Big|_1^2\right) = e^{-3} - e^{-6} \approx 0.0498$

3/6 No, porque no buscamos el tiempo entre 1 y 2, sino que buscamos el tiempo absoluto ~~del~~ al 2º arribo.

NOTA

c) Aquí nos encontramos en un caso "coloreo" en donde se divide en 2 casos, obtenemos dos procesos de Poisson ~~ind~~ independientes uno del otro ✓

H: "la persona recibida es Hombre" $\mathbb{P}(H=1) = 9/10$ ✓

M: " ——— " —— Mujer" $\mathbb{P}(M=1) = 1/10$ ✓

H_t: "# de hombres recibidos en t meses" $H_t \sim \mathcal{P}(3t * \mathbb{P}(H=1)) = \mathcal{P}(2.7t)$ ✓

M_t: "# de mujeres recibidas en t meses" $M_t \sim \mathcal{P}(3t * \mathbb{P}(M=1)) = \mathcal{P}(0.3t)$ ✓

$$\frac{\mathbb{P}(H_{[0,2]} = 4 \cap M_{[0,2]} = 1)}{\mathbb{P}(M_{[0,2]} = 1)} \overset{\text{indep}}{=} \frac{\mathbb{P}(H_{[0,2]} = 4) * \cancel{\mathbb{P}(M_{[0,2]} = 1)}}{\cancel{\mathbb{P}(M_{[0,2]} = 1)}}$$

$$= \mathbb{P}(H_{[0,2]} = 4) = \frac{(5.4)^4 e^{-5.4}}{4!} = \boxed{0.16}$$ ✓

7/7

Muy bien

18

HOJA Nº 3

FECHA 20/07/16

3. $X_1, \dots, X_n$ m a

$$F_X(x;\mu) = 5\mu x^4 e^{-\mu x^5} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \qquad \mu > 0$$

a) Para buscar $\hat{\mu}_{mv}$ tengo que encontrar el $\hat{\mu}$ que maximice a la función $L(\mu)$

$$\cdot L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} 5\mu x_i^4 e^{-\mu x_i^5} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x_i)$$

mova se supone $x_i > 0$

la maximizo utilizando ln,

$$\ln(L(\mu)) = n\ln 5 + n\ln\mu + \ln\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\sum_{i=1}^{n} x_i^5$$

la derivo y la igualo a 0 así encuentro su máximo

$$\frac{\partial \ln(L(\mu))}{\partial \mu} = \frac{n}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} x_i^5 = 0 \Rightarrow \frac{n}{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i^5 \Rightarrow \boxed{\hat{\mu}_{mv} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^5}}$$

Falta probar que es máx absoluto

Sigue en la hoja nº 4

HOJA N° 4

FECHA 20/07/06

b) ⊙ Como se sugiere buscara la distribución de $Y = X^5$ • $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$

donde X v.a $F_X(x;\mu)$

Como $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$] Es lo que hay que probar

$$\mathbb{P}(y \leq Y) = \mathbb{P}(y \leq X^5) = F_y(X^5) \Leftrightarrow F'_y(X^5) = f_y(X^5)$$ NO

$$F'_y(X^5) = \left[1 - e^{-\mu X^5}\right]' = 5\mu X^4 e^{-\mu X^5} = f_X(x;\mu)$$

Así queda comprobado $Y = X^5$ es exponencia de parametro μ para tal X

Por Propiedad de la invarianza de los EMV ⊙⊙ (como dice en Sug 1))

$$\beta = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \hat{\beta}_{MV} = \frac{1}{\hat{\mu}_{MV}} = \frac{1}{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^5}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^5}{n}$$

$\Rightarrow$ Como $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ se que $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma(n, \mu)$ indep

y como $\underset{\text{Por } ⊙}{Y = X^5} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^5 \sim \Gamma(n, \mu)$

Ademas, como dice sug 3) ii) se aplica $\frac{\sum x_i^5}{n} \sim \Gamma(n, \mu n)$

luego como $\beta = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow 1 = B * \mu$

Utilizo de vuelta sug 3) ii) y se que $\underbrace{B * \mu}_{=1} \underbrace{\frac{\sum x_i^5}{n}}_{\hat{\beta}_{MV} \text{ por } ⊙⊙} \sim \Gamma\left(n; \frac{\mu n}{B\mu}\right)$

$\Rightarrow \hat{\beta}_{MV} \sim \Gamma\left(n; \frac{n}{\beta}\right)$ que es lo que queria demostrar.

#

c) • $\mathbb{E}(\hat{B}_{MV}) = \dfrac{\frac{n}{n}}{\beta} = \beta$ lo cual es la definición de ser insesgado

$\hat{B}_{MV}$ es insesgado

• $\hat{B}_{MV} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{s}}{n} = \overline{X}_n$, $\mathbb{E}(x^s) = \mathbb{E}(y) = \frac{1}{\mu}$ (del punto b)

Por LGN $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(x)$

$\Rightarrow$ qvq $\hat{B}_{MV} \rightarrow \beta$

$\hat{B}_{MV} = \overline{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(y) = \frac{1}{\mu} = \beta \Rightarrow \hat{B}_{MV}$ es consistente

4. $X_1, \dots, X_{15}$ m.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

X_i: "Peso del ratón i" $i \in \mathbb{N}$

a) $\mathbb{P}$(el jefe eche al investigador | μ sigue igual) = 0.05

$\mathbb{P}$(decidir aumenta H_0 | no aumenta H_0) = 0.05

$\mathbb{P}$(rechazar H_0 | H_0 verdadero) = $\mathbb{P}$(error Tipo I)

$H_0: \mu = 15$ vs $H_1: \mu > 15$ $\qquad s' = 4$

el estadístico que usaré será: $T = \sqrt{n}\,\dfrac{(\bar{X}_n - \mu)}{s} \sim t_{n-1}$

Bajo H_0,

$$T = \sqrt{15}\,\frac{(\bar{X}_n - 15)}{4} \sim t_{n-1}$$

La región de rechazo será $RR = (t_{15-1} ; +\infty)$ con $n = 15$

quiero que t_{14}

$P(T > t_{14}) = 0.05 \Rightarrow t_{n-1} = 1.7613$

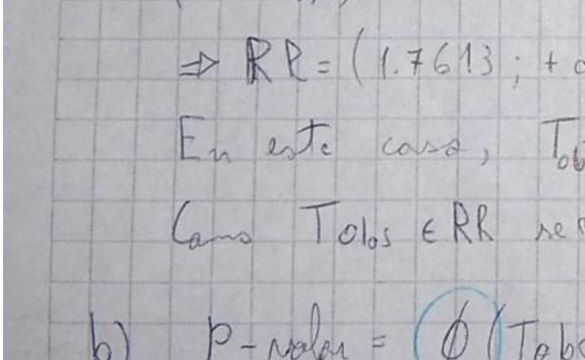
$\Rightarrow RR = (1.7613 ; +\infty)$

En este caso, $T_{obs} = \sqrt{15}\,\dfrac{(17 - 15)}{4} = 1.93$

Como $T_{obs} \in RR$ se rechaza H_0.

b) P-valor $= \phi(T_{obs}) \Rightarrow \phi(2.14) \leq \phi(1.93) \leq \phi(1.76)$

$\Leftrightarrow$ $0.025 \leq$ P-valor ≤ 0.05



Mientras α $\underset{>}{<}$ P-valor siempre se rechazará la hipótesis nula a nivel α. no!

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha < 0.025}$

ojo que ϕ nota la acumulada de una Normal No de una T-Student

c) Utilizzare come pivotale $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$

dando $\bar{X}_n = 17$, $S = 4$ y $n = 15$

$$\mathbb{P}\left(-t_{14;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{15}(17-\mu)}{4} \leq t_{14;\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.9 \Rightarrow 1-\alpha = 0.9 \Leftrightarrow \alpha = 0.1$$

$$\mathbb{P}\left(-t_{14;0.05} * \frac{4}{\sqrt{15}} \leq 17-\mu \leq t_{14;0.05} * \frac{4}{\sqrt{15}}\right) = 0.9$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-1.7613 \frac{4}{\sqrt{15}} + 17 \leq \mu \leq 17 + 1.7613 \frac{4}{\sqrt{15}}\right) = 0.9$$

$$\boxed{IC_{0.9}[15.181 ; 18.819]}$$