Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (10-12-2021)

Nombre y apellido: [redacted]

Libreta: [redacted]

Carrera: [redacted]

- Declaro que aprobé los trabajos prácticos de esta materia en el cuatrimestre segundo. . del año .2021.

- Firma [redacted]

1	2	3	4	N

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $f_x(0,1) = 2$ y $f_y(0,1) = 1$, y sea $h(t) = f(t^2, 1+t^3)$. Calcule $h''(0)$.

2. Verifique que la ecuación
$$x^3 + 3x^2 + y^3 + z^3 - 3y + z = 0$$
define implícitamente un función diferenciable $z = f(x,y)$ en todos los puntos de la superficie determinada por ella. Además encuentre una ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(0,1,1)$.

3. Sea S la superficie de ecuación
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 42.$$
Determine los puntos de S más cercanos y más lejanos al origen.

4. Calcule de manera exacta
$$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx.$$

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

[redacted] [redacted]

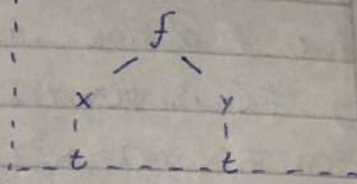
HOJA N° 1/2

FECHA 10/12/2021

① Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 / $f_x(0,1) = 2$ y $f_y(0,1) = 1$, y sea $h(t) = f(t^2, 1+t^3)$. Calcular $h''(0)$.

sea $r(t) = (t^2, 1+t^3)$, quiero calcular $h''(0)$, con $h(t) = f(r(t))$

Por el diagrama del árbol tenemos que



$h'(t) = f_x(t^2, 1+t^3).2t + f_y(t^2, 1+t^3).3t^2$

derivando nuevamente usando la regla del Producto

tenemos: $h''(t) = (f_{xx}(t^2, 1+t^3)2t + f_{xy}(t^2,1+t^3)3t^2)2t + 2f_x(t^2,1+t^3) + \dots$

$+ \dots (f_{yx}(t^2, 1+t^3).2t + f_{yy}(t^2, 1+t^3)3t^2)3t^2 + f_y(t^2, 1+t^3).6t$

como f es una función C^2, sabemos que todas sus derivadas segundas existen y son continuas, y por lo tanto diferenciable en $\mathbb{R}$, y

(*) en particular, lo es en el Punto $(0,1)$; Entonces evaluando $h''(t)$ en 0, tenemos:

$h''(0) = (\cancel{f_{xx}(0,1).0 + f_{xy}(0,1).3.0^2}).2.0 + 2f_x(0,1) + (\cancel{f_{yx}(0,1).2.0} + \dots$

$+ \dots \cancel{f_{yy}(0,1).3.0^2})3.0^2 + \cancel{f_y(0,1).6.0}$

todo lo que está multiplicado por 0 se va, Entonces nos queda:

$h''(0) = 2f_x(0,1)$. Por el enunciado, $f_x(0,1) = 2$, Por lo tanto $h''(0) = 4$.

(*) Como $h(t)$ es la composición $f(r(t))$ con f C^2 y $r(t)$ C^2 Por estar definida por dos Polinomios, tenemos que $h(t)$ también es C^2.

Conclusión: $h''(0) = 4$

② Verifique que la ecuación $x^3+3x^2+y^3+z^3-3y+z=0$ define implícitamente una función diferenciable $z=f(x,y)$ en todos los puntos determinados por ella. Además encuentre una ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(0,1,1)$.

TFI: Sea $S_K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / F(x,y,z)=K\}$, sea F una función diferenciable en $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in S_K$ y $F_z(P_0)\neq 0$. Entonces tenemos que F define implícitamente una función $z=\phi(x,y) / \phi(x_0,y_0)=z_0$ y $F(x_0,y_0,\phi(x_0,y))=K$ $\forall \mathbb{R}^3$.

Sea $F(x,y,z)=x^3+3x^2+y^3+z^3-3y+z$. Compruebo los supuestos del TFI: F es de clase C^1 por ser un polinomio, por lo que es diferenciable en $\mathbb{R}^3$.

Sea $S=\{F(x,y,z)=0\}$. El punto $P=(0,1,1)\in S$.

$F_z(x,y,z)=3z^2+1$. Como $z^2\geq 0$, $F_z(x,y,z)\neq 0$ $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Como se cumplen todos los supuestos, $F(x,y,z)$ define implícitamente una función $z=\phi(x,y)$.

La ecuación del plano tangente a f en $(0,1,1)$, se puede obtener a partir de F como: $\pi: \nabla F(P)\cdot(x,y-1,z-1)=0$, la cual tiene los mismos supuestos que el TFI, que sabemos que se cumplen. Entonces:

$F_x(x,y,z)=3x^2+6x$; $F_y(x,y,z)=3y^2-3$; $F_z(x,y,z)=3z^2+1$

$F_x(P)=0$, $F_y(P)=0$, $F_z(P)=4 \Rightarrow \nabla F(0,1,1)=(0,0,4)\neq\vec{0}$

$\pi: (0,0,4)\cdot(x,y-1,z-1)=0 \Leftrightarrow \pi: 4(z-1)=0 \Leftrightarrow$

$\pi: 4z-4=0 \Leftrightarrow \pi: z=1$

Conclusión: F define implícitamente una función $z=\phi(x,y)$ y el plano tangente a su gráfico en el punto $P=(0,1,1)$ es $\pi: z=1$.

NOTA

HOJA Nº 2/2
FECHA 10/12/2021

[redacted]

(3) Sea S la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=42$
Determine los puntos de S más cercanos y más lejanos al origen.

Calculo los máximos y mínimos de la función distancia sujeta a la restricción $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=42$,
sea la función distancia $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, como su cuadrado tiene los mismos extremos, tomo $h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.
Sea $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z$;
reescribo la ecuación para ver si es compacto:

$x^2-2x+1-1+y^2-2.2y+4-4+z^2-2.3z+9-9=42 \iff$

$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z-3)^2-9=42 \iff (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$

Como es una esfera de radio $\sqrt{56}$, es compacto.
Por el teorema de Weierstrass, $h(x,y,z)$ alcanza extremos absolutos.
Calculo puntos críticos mediante el teorema de multiplicadores de Lagrange: $\nabla h(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z)$:

$$\begin{cases} 2x=\lambda(2x-2) & (1)\\ 2y=\lambda(2y-4) & (2)\\ 2z=\lambda(2z-6) & (3)\\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=42 & (4)\end{cases}$$

(1) $x\neq 1 \Rightarrow \boxed{\frac{2x}{2x-2}=\lambda}$, en (2): $2y=\frac{2x}{2x-2}(2y-4)$

$(2x-2)2y=2x(2y-4) \iff \cancel{4xy}-4y=\cancel{4xy}-8x \iff -4y=-8x$

$\boxed{y=2x}$, (1) en (3) $\Rightarrow 2z=\frac{2x}{2x-2}(2z-6) \iff$

$2z(2x-2)=2x(2z-6) \iff \cancel{4xz}-4z=\cancel{4xz}-12x$

$-4z=-12x \iff \boxed{z=3x}$ $\quad x\neq 1 \Rightarrow x=x,\ y=2x,\ z=3x$, en (4)

$x^2+4x^2+9x^2-2x-8x-18x=42 \iff 14x^2-28x=42 \iff$

$x^2-2x=\frac{42}{14} \iff x^2-2x=3 \iff x^2-2x-3=0$, $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4(-3)}}{2}$

$=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \iff x_1=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$, $x_2=\frac{2-4}{2}=-1$

$x^2-2x-3=0 \iff x=\{-1,3\}$

Si $x=-1$, $y=-2$, $z=-3 \Rightarrow (-1,-2,-3)$; si $x=3$, $y=6$, $z=9 \Rightarrow (3,6,9)$

$x\neq 1$, puntos críticos $=\{(-1,-2,-3),(3,6,9)\}$

$x=1 \Rightarrow 2=\lambda.0$, absurdo

Evalúo f en los puntos críticos:

$f(-1,-2,-3)=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ ← mínimo absoluto

$f(3,6,9)=\sqrt{9+36+81}=\sqrt{126}$ ← máximo absoluto

NOTA

Conclusión: El punto $(-1,-2,-3)$ es el más cercano al origen y el punto $(3,6,9)$ es el más lejano, ya que $\nabla g(x,y,z) = (2x-2, 2y-4, 2z-6) \neq \vec{0}$ en estos puntos.

④ Calcular de forma exacta: $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

Usando el teorema de cambio de variables:

$\iiint_E f(x,y,z)\,dV(x,y,z) = \iiint_{E'} f(\rho,\theta,\varphi)\,|J_T(\rho,\theta,\varphi)|\,dV(\rho,\theta,\varphi)$

Cambio a coordenadas ~~polares~~ esféricas:

$x = \rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$, $y = \rho\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$

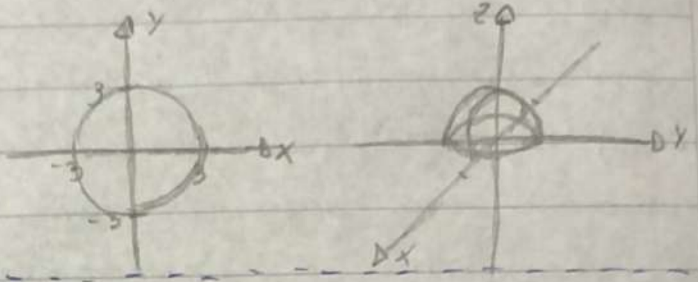
$|J_T(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\operatorname{sen}(\varphi)$.

Grafico la región de integración:

de los gráficos tenemos que:

$0 \le \rho \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

ya que es una semiesfera centrada



de radio 3. Mi nueva región de integración es:

$E' = \{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$

Como $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\cos(\varphi)$

Entonces, por el teorema de cambio de variables:

$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx = \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \rho^2\cos(\varphi)\rho^2\operatorname{sen}(\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,d\rho$

$= \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\rho^4\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,d\rho$, sea $u = \operatorname{sen}(\varphi)$, $du = \cos(\varphi)d\varphi$

si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$, si $\varphi = 0$, $u = 0$ $\Rightarrow$

$\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^4 u\,du\,d\theta\,d\rho = \int_0^3\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^4u^2\right]_{u=0}^{u=1} d\theta\,d\rho = \int_0^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^4\,d\theta\,d\rho =$

$\int_0^3\left[\frac{1}{2}\rho^4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = \int_0^3 \pi\rho^4\,d\rho = \left[\frac{1}{5}\pi\rho^5\right]_{\rho=0}^{\rho=3} = \frac{3^5}{5}\pi$

Conclusión: $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx = \frac{3^5}{5}\pi$