Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er Recuperatorio del 2do Parcial (03/12/2022) - 2do. cuatrimetre 2022

TEMA 2

1 (2,5 pts.)	2 (2,5 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B	~~B~~/B	B=	B	9 50

Apellido: Dieguez Nro. de libreta: 1467/21 Nro de práctica: 1.

Nombre: MARTÍN Carrera: Cs. Matemáticas

1. Sea $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 cuyo polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $(1,0)$ es

$$P(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 2x + y.$$

Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{h(x,y) - y - 2x + 1}{(x-1)^2 + y^2}.$$

---

2. Sea $f(x,y) = e^{xy-x} + 7$.

(a) Hallar extremos relativos y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Hallar, si existen, extremos absolutos en la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + (y-1)^2 \leq 8\,,\ y \leq 3\}.$$

---

3. (a) Hallar el área de la región delimitada por las curvas $x = 4 - y^2$ e $y - x = -2$.

(b) Hallar el volúmen del sólido delimitado por $x = 4 - y^2$, $y - x = -2$, $z = 0$ y $z = x^2 + 1$.

---

4. Calcular el volumen del sólido $W \subset \mathbb{R}^3$ acotado por las siguientes superficies:

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x - 4 - z = 0, \quad 4 - x - z = 0.$$

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

(1)

$f_3(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 2x + y$ en $(1,0)$

calculo su polinomio de Taylor de orden 2 para utilizarlo en el límite a calcular.

$f_x = 6x^2 - 6x + 2$

$f_y = 6y + 1$

$\boxed{f(1,0)} = (f(1,0)) = \boxed{1}$

$f_{xx} = 12x - 6$

$f_{yy} = 6$

$f_{xy} = 0$

$$T_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial y^2}\frac{(y)^2}{2} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial xy}(x-1)y + f(1,0)$$, todo evaluado en (1,0), sus deriv. parciales.

$f_x(1,0) = 2$

$f_y(1,0) = 1$

$f_{xx}(1,0) = 6 \rightarrow$ ✓

$f_{yy} = 6$

$f_{xy} = 0.$

$$T_2 = 2(x-1) + y + \frac{6}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{2}y^2 + \cancel{0.(x-1)y} +$$
$$1$$

$$\boxed{T_2 = 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 3y^2 + 1}$$ ✓

ahora, veré el límite a calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{h(x,y)-y-2x+1}{(x-1)^2+y^2}$$

Sin embargo, no conozco $h(x,y)$. Sumaré y restaré mi polinomio de Taylor para poder deshacerme de ella y trabajar con una función que sí conozco.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{h(x,y)-T_2+T_2-y-2x+1}{(x-1)^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \underbrace{\frac{h(x,y)-T_2}{(x-1)^2+y^2}}_{\to 0} + \frac{T_2-y-2x+1}{(x-1)^2+y^2}$$

~~esto es~~

$h(x,y)-T_2$ = Resto, que al estar dividido por la norma y, el límite, por el teorema del resto, tiende a 0

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{T_2-y-2x+1}{(x-1)^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2(x-1)+\cancel{y}+3(x-1)^2+3y^2+1-\cancel{y}-2x+1}{(x-1)^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} = \frac{3(x-1)^2+3y^2+2(x-1)-2x+2}{(x-1)^2+y^2} =$$

desarrollo.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{3(x-1)^2+3y^2+\cancel{2x}-\cancel{2}-\cancel{2x}+\cancel{2}}{(x-1)^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} = \frac{3\cancel{((x-1)^2+y^2)}}{\cancel{(x-1)^2+y^2}} = \boxed{3}$$

② $f(x,y) = e^{xy-x} + 7$

ⓐ extremos relativos y puntos silla en $\mathbb{R}^2$:

Para esto debo encontrar los puntos críticos, es decir, aquellos momentos en el que la derivada de la función es 0, o bien no existe.

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{xy-x}(xy-x)'dx, e^{xy-x}(xy-x)'dy\right)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{xy-x}(y-1), e^{xy-x}x\right)$$

Busco por coordenada:

$$e^{xy-x}(y-1) = 0$$

$$e^{xy-x}x = 0.$$

e^{p} jamás dará 0 dado que está elevado a una potencia. lo que puede dar 0 es el otro factor que multiplica la expresión: $(y-1)$ o bien x.

$\boxed{y=1}$, $\boxed{x=0}$

$PC = (0,1)$ es el único PC en $\mathbb{R}^2$.

Veré de que tipo es por medio del criterio del Hessiano. Para ello requiero f_{xx} f_{yy} f_{xy}.

$$f_x = e^{xy-x}(y-1)$$

$$f_y = e^{xy-x}x$$

$$f_{xx} = e^{xy-x}\cdot(xy-x)'dx\,(y-1) = e^{xy-x}(y-1)^2$$

$$f_{yy} = e^{xy-x}x^2$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy-x}(y-1)x + e^{xy-x}$$

ahora, los evalúo en ~~el~~ punto crítico $(0,1)$.

$$f_{xx}(0,1) = 0$$

$$f_{yy}(0,1) = 0$$

$$f_{xy}(0,1) = 1$$

la matriz hessiana es pues:

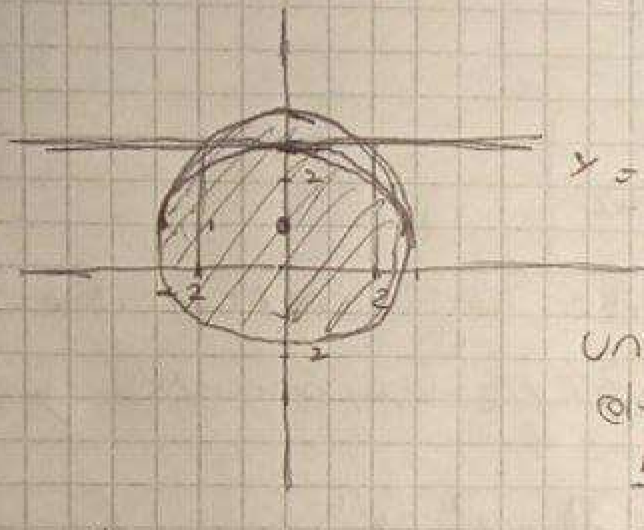
$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su determinante:

$$\det(Hf) = (0 \cdot 0) - (1 \cdot 1) = \boxed{-1}$$

Al ser menor que 0 su determinante, esto significa que $(0,1)$ es un punto silla.

2b) Veo ahora la región dada.



$y = 3$

Una ~~esfera~~ disco de radio $\sqrt{8}$ desplazada hacia arriba en 1. Cortado por $y = 3$.

Ya vi sus puntos críticos internos en $\mathbb{R}^2$ en el punto a. $PC = (0, 1)$.

Veo ahora los bordes.

Veré el círculo con el método de Lagrange.

$$\nabla f(x,y) = \lambda g(x,y)$$
$$g(x,y) = 8.$$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{xy-x}(y-1),\ e^{xy-x}x\right)$$

$$\nabla g(x,y) = (2x,\ 2y-2)$$ siendo $g(x,y) = x^2 + (y-1)^2 = 8$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & e^{xy-x}(y-1) = \lambda 2x \\ \text{II} & e^{xy-x}\,x = \lambda 2y - 2\lambda \\ \text{III} & x^2 + (y-1)^2 = 8 \end{array}\right\}$$

divido I por II.

$$\frac{\cancel{e^{xy-x}}(y-1)}{\cancel{e^{xy-x}}\,x} = \frac{\cancel{2\lambda}\,x}{\cancel{\lambda 2}(y-1)}$$ con $e^{xy-x}x \neq 0$, $2\lambda(y-1) \neq 0$.

$$\frac{(y-1)}{x} = \frac{x}{(y-1)} \Rightarrow (y-1)^2 = x^2$$

entonces:

$$(y-1) \begin{cases} -x \\ x \end{cases}, \quad \boxed{\begin{array}{l} y = -x+1 \\ y = x+1 \end{array}}$$

meto este resultado en III para averiguar los valores de x e y.

$x^2+(y-1)^2=8$

$x^2+x^2=8$

$x^2=4 \rightarrow \boxed{x \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}}$

~~Veo los valores de y correspondientes~~

~~x = 2 . Con el otro valor de y.~~

$\cancel{x^2+(x+1-1)^2=8 \Rightarrow x^2+x^2}$

con el otro valor de y, se llega a los mismos de x.

Busco sus y correspondientes.

$x=2 \quad x^2+(y-1)^2=8$

$(y-1)^2=4$

$(y-1) \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} y=-1 \\ y=3 \end{matrix}}$

$x=-2$

$(-2)^2+(y-1)^2=8$

$(y-1)^2=4$ ✓

$\boxed{y \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}}$

entonces, tengo 4 puntos críticos más:

$PC_2=(2,-1)$, $PC_3=(2,3)$

$PC_4=(-2,-1)$, $PC_5=(-2,3)$

de los cuales dos son intersecciones con la recta: $(2,3)$ y $(-2,3)$.

Veré ahora puntos críticos en la recta:

Parametrizo la misma como:

$\alpha_2 = (t, 3) \quad t \in (-2, 2]$

lo compongo en f:

$f \circ \alpha_2 = e^{3t-t} + 7.$

lo derivo para ver sus p.c:

$e^{3t-t}(3-1) = 2e^{3t-t}.$

la misma jamás será 0, por lo que ya tengo todos mis puntos críticos

ahora los evalúo para justar mis extremos.

$f(2,-1) = 7{,}01 = e^{-4} + 7$

$f(2,3) = 61{,}59$

$f(-2,3) = e^{-4} + 7$

$f(0,1) = 8$ punto silla.

$f(-2,-1) = 61{,}59.$

mi ~~m~~ máximo es ~~f~~ $(2,3)$ y $(-2,-1)$,
y mi mínimo es $(2,-1)$.

$\boxed{x = 4 - y^2}$ $\boxed{x = 2 + y}$

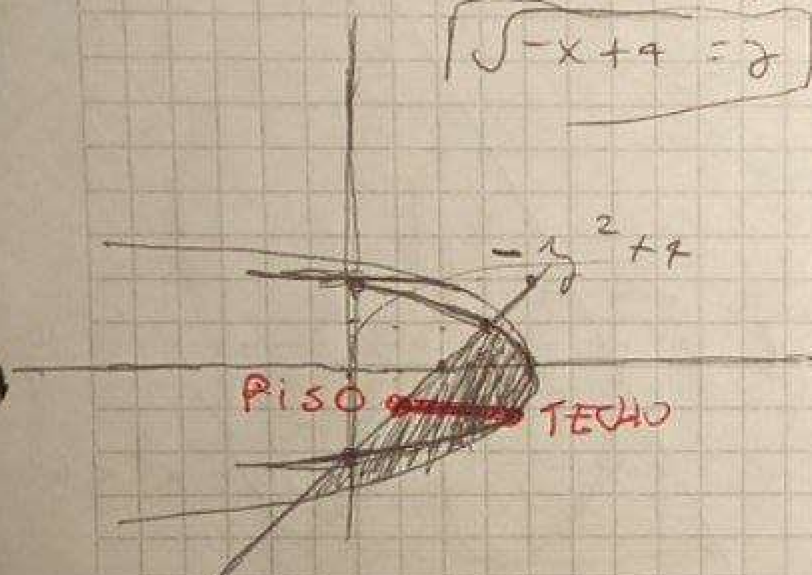
③ área en ②

$x = 4 - y^2$ $\quad y - x = -2$

$x - 4 = -y^2$

$-x + 4 = y^2$ $\quad \boxed{y = -2 + x}$

$\boxed{\sqrt{-x+4} = y}$



TIPO II.

$x \to 4 - y^2$ piso

$2 + y$ techo.

$y =$

intersecciones entre ambas curvas:

$\cancel{2 + y = 4 - y^2 \Rightarrow -y^2 + 2 - y} = \boxed{y^2 + y - 2 = 0}$

$y =$ piso $\Rightarrow [-2, 1]$ ← ¿PORQUÉ?

$$\int_{y=-2}^{1} \int_{x = 4 - y^2}^{x = 2 + y} 1 \, dx \, dy =$$

el alrevés, el piso es la recta, el techo la parábola

$$x \Big|_{4-y^2}^{2+y} = 2 + y - 4 + y^2 = \boxed{y^2 + y - 2}$$

$$\int_{y=-2}^{y=1} y^2 + y - 2 \, dy = \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - 2y \Big|_{-2}^{1} =$$

$$\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right] - \left[-\frac{8}{3} + 2 + 4\right] =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 2 - 4 = \left|-\frac{9}{2}\right| = \boxed{\frac{9}{2}} \text{ Área.}$$

③ ⓑ mi dominio en x,y es el mismo que calculé en el punto anterior.

lo aprovecho y veo mis límites en z.

$$\int_0^{x^2+1}$$, pues $z \geq 0$.

al revés

$$\int_{y=-2}^{y=1}\int_{x=4-y^2}^{x=2+y}\int_0^{z=x^2+1} 1\,dz\,dx\,dy.$$

$$\int_0^{z=x^2+1} dz = z\Big|_0^{x^2+1} = \boxed{x^2+1}$$

$$\int_{x=4-y^2}^{x=2+y} x^2+1\,dx = \frac{x^3}{3}+x\Big|_{4-y^2}^{2+y} =$$

$$\frac{(2+y)^3}{3}+2+y-\left[\frac{(4-y^2)^3}{3}+4-y^2\right]=$$

luego de las distributivas y las sumas:

$$\frac{1}{3}y^3+2y^2+5y+\frac{14}{3}-\frac{64}{3}+\frac{32}{3}y^2+\frac{4}{3}y^4+\frac{16}{3}y^2-\frac{8}{3}y^4-\frac{y^6}{3}-4+y=$$

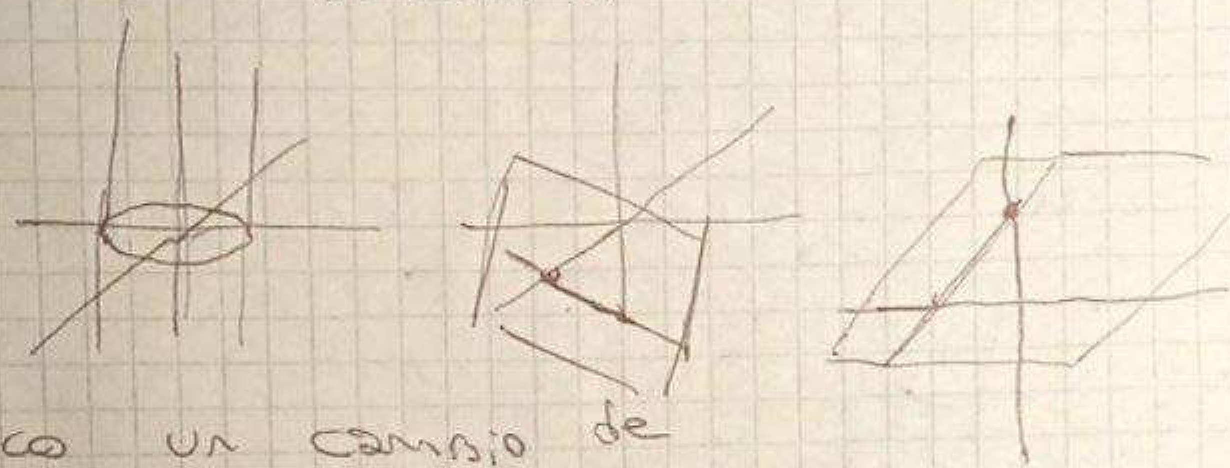
$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{3}y^3+\frac{22}{3}y^2+6y-\frac{4}{3}y^4-\frac{y^6}{3}+\frac{2}{3}\,dy=$$

$$\frac{y^4}{12}+\frac{22}{9}y^3+3y^2-\frac{4}{15}y^5-\frac{y^7}{21}+\frac{2}{3}y\Big|_{-2}^{1}=$$

$$\frac{1}{12}+\frac{22}{9}+3-\frac{4}{15}+\frac{1}{21}+\frac{2}{3}-\left[\frac{(-2)^4}{12}+\frac{22}{9}(-2)^3+3(-2)^2-\frac{4}{15}(-2)^5-\frac{(-2)^7}{21}+\frac{2}{3}\cdot(-2)\right]=$$

$$5{,}93-5{,}83=\boxed{0{,}1}$$

④ Tengo un cilindro acotado por dos planos.
de radio 2.



Busco un cambio de variable a cilíndricas.

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$z = z$

$r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta = 4$

$r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}_{1}) = 4$

$\boxed{r = 2}$

Mis planos son:

$r\cos\theta - z = 4 \rightarrow z = r\cos\theta - 4$

$-r\cos\theta - z = -4 \rightarrow z = -r\cos\theta + 4$

$\boxed{0 \leq \theta \leq 2\pi}$

$$\int_{0}^{\theta=2\pi}\int_{0}^{r=2}\int_{z=-r\cos\theta-4}^{r\cos\theta+4} 1 \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

→ a cambiarlo.

$$\int_z^z z = \int r\cos\theta \cdot r \Big|_{-r\cos\theta+4}^{r\cos\theta-4} =$$

$= (r\cos\theta - 4 + r\cos\theta - 4)\,r =$

$r^2\cos\theta + r^2\cos\theta + 8r =$

$\boxed{2r^2\cos\theta + 8r}$ →

$$\int_0^{r=2} 2r^2 \cos\theta + 8r =$$

$$\frac{2}{3} r^3 \cos\theta + \frac{8}{2} r^2 \Big|_0^2 =$$

$$\frac{16}{3}\cos\theta + 16 + 16 = \frac{16}{3}\cos\theta + 32$$

$$\int_0^{\theta=2\pi} \frac{16}{3}\cos\theta + 32 =$$

$$\frac{16}{3}\operatorname{sen}\theta + 32\theta \Big|_0^{\theta=2\pi} =$$

$$\frac{16}{3}\cancel{\operatorname{sen}(2\pi)} + 32 \cdot 2\pi = \boxed{64\pi}$$

Volumen.