Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (04-03-2022)

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se sabe que el plano tangente a f en el punto $(1, 2, f(1, 2))$ es el plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 1$. Calcular la derivada direccional de f en la dirección que va del punto $(1, 2)$ al $(3, 4)$

   Solución: Notemos primero que la dirección de $(1, 2)$ al $(3, 4)$ es el vector

   $$\vec{v} = \frac{1}{\|(3,4)-(1,2)\|}\big((3,4)-(1,2)\big) = \frac{1}{\|(2,2)\|}(2,2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

   Notemos también que

   $$2x + 3y + 4z = 1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}. \tag{1}$$

   Finalmente, recordemos que el plano tangente a f en $(1, 2, f(1, 2))$, tiene ecuación

   $$\begin{aligned} z &= f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) \\ &= f_x(1,2)x + f_y(1,2)y + f(1,2) - f_x(1,2) - 2f_y(1,2). \end{aligned}$$

   Comparando esto con (1), vemos que $f_x(1, 2) = -\frac{1}{2}$ y $f_y(1, 2) = -\frac{3}{4}$. Por lo tanto,

   $$D_{\vec{v}}(f)(1,2) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{-5\sqrt{2}}{8}.$$

2. Sea E la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 80$. Encontrar el rectángulo con lados paralelos a los ejes inscripto en E de perímetro máximo.

   Solución: Un rectángulo con lados paralelos a los ejes inscripto en E, queda completamente determinado por su vértice (x, y), con $x, y > 0$ (los otros son $(-x, y)$, $(x, -y)$ y $(-x, -y)$). Debemos encontrar los puntos (x, y) de la elipse, con $x, y \geq 0$ en los que la función $P(x, y) = 4(x + y)$, que da el perímetro del rectángulo con esos vértices, sujeta a la restricción $4x^2 + y^2 = 80$, alcanza un máximo global (el Teorema de Weierstrass garantiza que estos puntos existen). En los extremos de la curva tenemos $P(0,\sqrt{80}) = 4\sqrt{80}$ y $P(\sqrt{20},0) = 4\sqrt{20}$. Para ver que pasa en los otros puntos aplicamos multiplicadores de Lagrange. Haciendo esto obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4 &= 8\lambda x, \\ 4 &= 2\lambda y, \\ 4x^2 + y^2 &= 80. \end{aligned}$$

De las primeras 2 ecuaciones se sigue que $x = \frac{1}{2\lambda}$ e $y = \frac{2}{\lambda}$. Reemplazando x e y por estos valores en la tercera ecuación, obtenemos que $\frac{5}{\lambda^2} = 80$, por lo que $\lambda = \pm\frac{1}{4}$. Así, tenemos las siguientes posibilidades $(x,y) = (2,8)$ y $(x,y) = (-2,-8)$. El máximo se obtiene en $(2,8)$. Por lo tanto, el rectángulo de perímetro máximo inscripto en E es el rectángulo con vértices $(2,8)$, $(-2,8)$, $(2,-8)$ y $(-2,-8)$.

3. Probar que si $|x| < 0,1$ y $|y| < 0,1$, entonces

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \approx xy$$

con error menor que $0,002$.

Solución: Sea $t \in \mathbb{R}$. Como $\operatorname{sen}'(t) = \cos(t)$ y $\operatorname{sen}''(t) = -\operatorname{sen}(t)$, existe θ_t entre t y 0 tal que

$$\operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(0) + \cos(0)t - \frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{2}t^2 = t - \frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{2}t^2.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \left(x - \frac{\operatorname{sen}(\theta_x)}{2}x^2\right)\left(y - \frac{\operatorname{sen}(\theta_y)}{2}y^2\right) = xy + R(x,y),$$

donde

$$R(x,y) = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_y)}{2}xy^2 - \frac{\operatorname{sen}(\theta_x)}{2}yx^2 + \frac{\operatorname{sen}(\theta_x)}{2}\frac{\operatorname{sen}(\theta_y)}{2}x^2y^2.$$

Para concluir la resolución del ejercicio es suficiente notar que

$$\begin{aligned} |R(x,y)| &= \left|-\frac{\operatorname{sen}(\theta_y)}{2}xy^2 - \frac{\operatorname{sen}(\theta_x)}{2}yx^2 + \frac{\operatorname{sen}(\theta_x)}{2}\frac{\operatorname{sen}(\theta_y)}{2}x^2y^2\right| \\ &\leq \left|\frac{\operatorname{sen}(\theta_y)}{2}xy^2\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}(\theta_x)}{2}yx^2\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}(\theta_x)}{2}\frac{\operatorname{sen}(\theta_y)}{2}x^2y^2\right| \\ &\leq 0,5 \times 0,001 + 0,5 \times 0,001 + 0,25 \times 0,0001 \\ &\leq 0,002. \end{aligned}$$

4. Calcule

$$\iiint_C z(x^2+y^2)\, dV,$$

donde C es el cuerpo $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z \geq 0, z^2 \leq x^2+y^2\}$.

Solución: El cuerpo está delimitado por el plano $z=0$, y las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2+y^2=1$ (bordes de cono y cilindro respectivamente). Introduciendo coordenadas cilíndricas (r,θ,z) definidas como $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $z=z$, la región de integración se describe como $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 < r < 1$ y, para cada (r,θ), $0 \leq z \leq r$. Entonces, como $x^2+y^2=r^2$ y el Jacobiano es igual a r, tenemos

$$\iiint_C z(x^2+y^2)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r zr^2 r dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\frac{r^2}{2} dr d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}.$$