1	2	3	4
B/B-	B	~~B-~~ B-	B

CALIF.
10

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

CARRERA: CUATR. APROBACIÓN TPS:

CUATR. APROBACIÓN TALLER: ¿LLENÓ LA ENCUESTA?

Algebra I

Examen Final (21/12/2022)

1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(\{1,2,3,\ldots,10\})$ definida como:

$$A\mathcal{R}B \quad \text{si y solo si} \quad A \triangle B \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   (b) ¿Cuántos conjuntos B hay en la clase de equivalencia de $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$?

2. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(k^7+3:28) = 14$ y $11 \mid k^{401}+4k+1$. Calcular los posibles restos de dividir k por 308.

3. Sea $f = X^{12} - 3X^4 + a \in \mathbb{C}[X]$.

   (a) Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f tiene raíces múltiples.

   (b) Para cada valor de a hallado, calcular todas las raíces múltiples de f con sus respectivas multiplicidades.

4. Se define la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f_1 &= X^3+2X^2+X, \\ f_2 &= X^4-6X^2-8X-3, \\ f_{n+2} &= (X^3-3X-2)f_{n+1}+(X^3+X^2-X-1)f_n\ ,\ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

   Calcular la multiplicidad de -1 como raíz de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1) a) $\mathcal{R}$ es de equivalencia $\iff$ $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva

reflexividad

$\mathcal{R}$ reflexiva si

$A\mathcal{R}A, \ \forall A \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,10\})$ $\boxed{\text{a partir de acá uso } Q=\{1,2,\dots,10\}}$

$A\mathcal{R}A \iff A \Delta A \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$

pero $A \Delta A = \emptyset \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ✓

entonces $\boxed{\mathcal{R} \text{ es reflexiva}}$

simetría

$\mathcal{R}$ simétrica si

$A\mathcal{R}B \iff B\mathcal{R}A \quad A,B \in \mathcal{P}(Q)$

$A\mathcal{R}B \iff \left(A \Delta B \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}\right) \iff \left(B \Delta A \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}\right) \iff B\mathcal{R}A$

entonces $\boxed{\mathcal{R} \text{ es simétrica}}$ ✓

transitividad

$\mathcal{R}$ transitiva si

$A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}C \Rightarrow A\mathcal{R}C \quad A,B,C \in \mathcal{P}(Q)$

$$\left.\begin{array}{l} A\mathcal{R}B \iff A\Delta B \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\} \iff \left[(x\in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B) \,/\, \forall x \in \{8,9,10\}\right] \\ B\mathcal{R}C \iff B\Delta C \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\} \iff \left[(x\in B \wedge x \in C) \vee (x \notin B \wedge x \notin C) \,/\, \forall x \in \{8,9,10\}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{para cada } x \in \{8,9,10\} \\ \text{si } x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \\ \text{si } x \notin B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left[(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \notin C) / \forall x \in \{8,9,10\}\right] \iff A \Delta C \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\} \iff$

$\iff A\mathcal{R}C$

Bien

entonces $\boxed{\mathcal{R} \text{ es transitiva}}$

como R es reflexiva, simetrica y transitiva, R es una relacion de equivalencia.

b) $B \in \bar{A} \iff B \Delta Q \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\{8,9,10\} \subseteq B$

seguro $B \subseteq \{8,9,10\}$ ya que la diferencia simetrica debe sacarlos del resultado, pero puede o no contener a todos los numeros entre 1 y 7

hay entonces 2^7 conjuntos en la clase de equivalencia de A

B^{-}

2) $(k^7+3 : 28) = 14$

$14 \mid k^7+3 \iff k^7+3 \equiv 0\,(14) \overset{2\perp 7}{\iff} \begin{cases} k^7+3 \equiv 0\,(2) \\ k^7+3 \equiv 0\,(7) \end{cases}$

$k^7+3 \equiv 0\,(2) \iff k+1 \equiv 0\,(2) \iff \underline{k \equiv 1\,(2)}$ ✓

$k^7+3 \equiv 0\,(7)$ como 7 es primo, o bien $7 \mid k$ ó $k \perp 7$

si $7 \mid k$

$k^7+3 \equiv 0^7+3 \equiv 3 \not\equiv 0\,(7) \Rightarrow k \perp 7$

$k^7+3 \underset{\substack{PTF \\ k\perp 7}}{\equiv} k^{r_6(7)}+3 \equiv k+3\,(7)$

$k+3 \equiv 0\,(7) \iff \underline{k \equiv 4\,(7)}$ ✓

como $28 = 2^2 \cdot 7 \Rightarrow 4 \nmid k^7+3$ (sino el mcd sería 28) ✓

$14 = 2 \cdot 7$

$\cancel{k^7+3 \underset{\substack{PTF \\ k\equiv 1(2) \\ \text{implica } k\perp 4}}{\equiv} k^{r_3(7)}}$

como $k \equiv 1(2) \Rightarrow k \equiv 1(4) \vee k \equiv 3(4)$

si $k \equiv 1\,(4)$

$k^7+3 \equiv 1+3 \equiv 0\,(4)$ abs ya que $4 \nmid k^7+3$

$\Rightarrow \underline{k \equiv 3(4)}$ ✓

$k^7+3 \equiv 3^7+3 \equiv 3+3 \equiv 2\,(4)$ (chequeo que no sea absurdo)

$11 \mid k^{401}+4k+1$ ~~como 11 es~~

$k^{401}+4k+1 \equiv 0\,(11)$ como 11 es primo, o bien $11 \mid k$ ó $k \perp 7$

si $11 \mid k$

$k^{401}+4k+1 \equiv 0^{401}+4\cdot 0+1 \equiv 1\,(11)$ abs ya que $11 \mid k^{401}+4k+1$

$\Rightarrow k \perp 11$

$k^{401}+4k+1 \underset{\substack{PTF \\ k\perp 11}}{\equiv} k^{r_{10}(401)}+4k+1 \equiv k+4k+1 \equiv 5k+1\,(11$ ✓

$5K+1 \equiv 0\ (11) \iff 5K \equiv 10\ (11) \iff K \equiv 2\ (11)$

como 11 es primo

$\exists!\ k \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ tal que $5 \cdot K \equiv 10\ (11)$

en resumen

$K \equiv 1\ (2)$, $K \equiv 3\ (4)$, $K \equiv 4\ (7)$, $K \equiv 2\ (11)$

$308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} K \equiv 3\ (4) \\ K \equiv 4\ (7) \end{array}\right\}^{4 \perp 7} \Rightarrow K \equiv 11\ (28) \\ K \equiv 2\ (11) \end{array}\right\}^{28 \perp 11} \Rightarrow K \equiv 123\ (308)$$

$$\boxed{r_{308}(K) = 123}$$

3) a) $f = x^{12} - 3x^4 + a \in \mathbb{C}[x]$

$f' = 12x^{11} - 12x^3 = 12x^3(x^8 - 1) = 12x^3(x^4-1)(x^4+1)$

$= 12x^3(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = 12x^3(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) =$

$= 12x^3(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)(x^2-i)(x^2+i) =$

$= 12x^3(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)(x+\sqrt{i})(x-\sqrt{i})(x+\sqrt{-i})(x-\sqrt{-i})$

$\sqrt{a}$ = único real positivo cuyo cuadrado es a.
no está definido para: $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ni para $a \in \mathbb{R}_{<0}$
Sólo para $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

las únicas posibles raíces múltiples son:

$\{0, 1, -1, i, -i, \sqrt{i}, -\sqrt{i}, \sqrt{-i}, -\sqrt{-i}\}$

0 es raíz si y solo si $f(0) = 0$

$0^{12} - 3 \cdot 0^4 + a = 0$

$a = 0$

con $a = 0$, f tiene raíz 0 de multiplicidad 4

1 es raíz si $f(1) = 0$

$1^{12} - 3 \cdot 1^4 + a = 0$

$-2 + a = 0$

$a = 2$

con $a = 2$, f tiene raíz 1 de multiplicidad 2

-1 es raíz si $f(-1) = 0$

$(-1)^{12} - 3 \cdot (-1)^4 + a = 0$

$-2 + a = 0$

$a = 2$

con $a = 2$, f tiene raíz -1 de multiplicidad 2

i raíz $\iff F(i) = 0$ $\qquad$ $-i$ raíz $\iff F(-i) = 0$

$i^{12} - 3 i^4 + a = 0$ $\qquad$ $(-i)^{12} - 3(-i)^4 + a = 0$

$1 - 3 + a = 0$ $\qquad$ $1 - 3 + a = 0$

$a = 2$ $\qquad$ $a = 2$

con $a = 2$, F tiene raíces i y $-i$ de multiplicidad 2

$\sqrt{i}$ raíz $\iff F(\sqrt{i}) = 0$ $\qquad$ $\sqrt{-i}$ raíz $\iff F(\sqrt{-i}) = 0$

$(\sqrt{i})^{12} - 3 \sqrt{i}^4 + a = 0$ $\qquad$ $(\sqrt{-i})^{12} - 3 \sqrt{-i}^4 + a = 0$

$i^6 - 3 i^2 + a = 0$ $\qquad$ $(-i)^6 - 3(-i)^2 + a = 0$

$-1 + 3 + a = 0$ $\qquad$ $-1 + 3 + a = 0$

$2 + a = 0$ $\qquad$ $2 + a = 0$

$a = -2$ $\qquad$ $a = -2$

con $a = -2$, F tiene raíces $\sqrt{i}$ y $\sqrt{-i}$ de multiplicidad 2

$-\sqrt{i}$ raíz $\iff F(-\sqrt{i}) = 0$ $\qquad$ $-\sqrt{-i}$ raíz $\iff F(-\sqrt{-i}) = 0$

$(-\sqrt{i})^{12} - 3(-\sqrt{i})^4 + a = 0$ $\qquad$ $(-\sqrt{-i})^{12} - 3(-\sqrt{-i})^4 + a = 0$

$(i)^6 - 3 i^2 + a = 0$ $\qquad$ $(-i)^6 - 3(-i)^2 + a = 0$

$a = -2$ $\qquad$ $a = -2$

con $a = -2$, F tiene raíces $-\sqrt{i}$ y $-\sqrt{-i}$ de multiplicidad 2

a) ~~F tiene raí~~

F tiene raíces multiples cuando $a \in \{-2, 0, 2\}$

b) para $a = 0$, F tiene ~~una~~ sola raíz multiple; 0; de multiplicidad 4

para $a = 2$, F tiene 4 raíces multiples; $1, -1, i, -i$; todas de multiplicidad 2

para $a = -2$, F tiene 4 raíces multiples; $\sqrt{i}, \sqrt{-i}, -\sqrt{i}, -\sqrt{-i}$; todas de multiplicidad 2

4) $F_1 = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$ la raíz -1 tiene mult 2 en F_1

$F_2 = x^4-6x^2-8x-3 = (x-3)(x+1)^3$ la raíz -1 tiene mult 3 en F_2

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -6 & -8 & -3 \\
-1 & & -1 & 1 & 5 & 3 \\ \hline
 & 1 & -1 & -5 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 2 & 3 & \\ \hline
 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & 3 & & \\ \hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$F_3 = (x^3-3x-2)(x-3)(x+1)^3 + (x^3+x^2-x-1)x(x+1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
-1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 2 & \\ \hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline
 & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 1 & \\ \hline
 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$F_3 = (x-2)(x-3)(x+1)^5 + (x-1)x(x+1)^4 = [(x-2)(x-3)(x+1) + x(x-1)](x+1)^4 =$

$= [(x^2-5x+6)(x+1) + x^2 - x](x+1)^4 =$

$= [x^3-5x^2+6x+x^2-5x+6+x^2-x](x+1)^4 =$

$= (x^3-3x^2+6)(x+1)^4$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 6 \\
-1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline
 & 1 & -4 & 4 & \boxed{2}
\end{array}$$

la raíz -1 tiene mult 4 en F_3

creo que -1 tiene mult $n+1$ en F_n $\forall n \in \mathbb{N}$

lo veo por inducción completa

casos base

$F_1 = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2 \Rightarrow -1$ tiene mult 2 en F_1

$F_2 = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x-3)(x+1)^3 \Rightarrow -1$ tiene mult 3 en F_2

paso inductivo

HI: $F_h = P_h(x)(x+1)^{h+1}$ donde $P_h(x)$ es un polinomio no divisible por $x+1$

$\forall\, h \leq k \in \mathbb{N}$

qvq $F_{k+1} = P_{k+1}(x)(x+1)^{k+2}$ donde $P_{k+1}(x)$ no es divisible por $x+1$

$$F_{k+1} \overset{\text{def}}{=} (x^3 - 3x - 2) F_k + (x^3 + x^2 - x - 1) F_{k-1}$$

$$F_{k+1} = (x-2)(x+1)^2 F_k + (x-1)(x+1)^2 F_{k-1}$$

por HI

$$F_{k+1} = (x-2)(x+1)^2 P_k(x)(x+1)^{k+1} + (x-1)(x+1)^2 P_{k-1}(x)(x+1)^k$$

$$F_{k+1} = \left[(x-2)(x+1) P_k(x) + (x-1) P_{k-1}(x)\right](x+1)^{k+2}$$

si $(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x)$ no es divisible por $x+1$ puedo tomarlo como $P_{k+1}(x)$

si $(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x)$ es divisible por $x+1$, existe $Q(x)$ polinomio tal que

$$(x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x) = Q(x)(x+1)$$

$$(x-2)(x+1)P_k(x) - Q(x)(x+1) = (x-1)P_{k-1}(x)$$

$$\left[(x-2)P_k(x) - Q(x)\right](x+1) = (x-1)P_{k-1}(x)$$

pero esto es absurdo ya que por HI $P_{k-1}(x)$ no es divisible por $x+1$

así que $P_{k+1}(x) = (x-2)(x+1)P_k(x) + (x-1)P_{k-1}(x)$

no es divisible por $x+1$

entonces volviendo a

$F_{k+1} = P_{k+1}(x)(x+1)^{k+2}$ donde $P_{k+1}(x)$ no es divisible por $x+1$

queda demostrado entonces por inducción que

-1 tiene multiplicidad $n+1$ en F_n $\forall n \in \mathbb{N}$