Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer Parcial (01/10/2022) - 2do. cuatrimetre 2022

TEMA 1

1 (2 pts.)	2 (3 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B/B-	B-/B-	B	B	9,25

Apellido: LISAZO Nro. de libreta: 1783/21 Nro de práctica: 2

Nombre: TOMAS Carrera: LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION

1. Sea C la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(x-2)^2 + z^2 = 4 \text{ y } x + y + z = 1.$$

(a) Hallar una parametrización de C.

(b) Hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente a C en el punto $P = (2, -3, 2)$.

---

2. Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen dar su valor.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)\sin^2(y+1)}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{(x-3)\sqrt{|y|}\,(x+2)}{y + (x-3)^2}$.

---

3. Estudiar la diferenciabilidad en **todo punto** de $\mathbb{R}^2$ para

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 - x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

---

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(-1,1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(-1,1) = 2 \;\; y \;\; \lim_{t\to 2} f(e^{t-2} - t, t^3 - 3t - 1) = 16.$$

(a) Hallar $\nabla f(-1,1)$.

(b) Hallar el plano tangente al gráfico de

$$g(s,t) = f\left(s^2(t+1) - e^s, s^2 + t^2\right)$$

en el punto $(0, 1, g(0,1))$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

TOMAS LISAZO

Hoja 1

LU: 1783/21

① a) $(x-2)^2+z^2=4$ y $x+y+z=1$

$(x-2)^2+z^2=4 \longleftrightarrow$ Un cilindro de radio 2, paralelo al eje y y centrado en $(2,0,0)$

Parametrizar eso es facil.

$$C(t)=\begin{cases} x=2\cos(t)+2 \\ y=y \\ z=2\,sen(t) \end{cases} \quad \text{con } 0\leq t\leq 2\pi$$

Nos falta y, pero podemos despejarla en la segunda ecuacion

$x+y+z=1 \Longleftrightarrow y=1-x-z \longleftrightarrow$ Y reemplazamos en la parametrizacion

Finalmente,

$$C(t)=\begin{cases} x=2\cos(t)+2 \\ y=1-2\cos(t)-2-2\,sen(t)=-2(\cos(t)+sen(t))-1 \\ z=2\,sen(t) \end{cases} \quad \text{con } 0\leq t\leq 2\pi$$

b) $P=(2,-3,2)$ Cómo lo hallás?

Si evaluamos $t=\frac{\pi}{2}$ en C, obtenemos el punto P, ya que,

$$C(\tfrac{\pi}{2})=\begin{cases} x=2\cos(\frac{\pi}{2})+2=0+2=2 \\ y=-2(\cos(\frac{\pi}{2})+sen(\frac{\pi}{2}))-1=-2\cdot 1-1=-3 \\ z=2\,sen(\frac{\pi}{2})=2 \end{cases}$$

Para hallar la recta tangente a C, necesito C', para luego evaluarlo en el punto.

$$C'(t)=\begin{cases} x'=-2sen(t) \\ y'=-2(-sen(t)+cos(t)) \\ z'=2cos(t)\end{cases} \quad \text{con } 0\leq t\leq 2\pi$$

Y buscamos $C'(\frac{\pi}{2})$

$$C'(\tfrac{\pi}{2})=\begin{cases} x'=-2sen(\frac{\pi}{2})=-2 \\ y'=-2(-sen(\frac{\pi}{2})+cos(\frac{\pi}{2}))=-2\cdot(-1)=2 \\ z'=2cos(\frac{\pi}{2})=2\cdot 0=2 \quad 0\end{cases}$$

La derivada nos da la direccion de la recta. Juntandolo todo tenemos,

$$RT_c(\lambda)\cancel{=}\ \lambda(-2,2,\overset{0}{2})+(2,-3,2) \overset{=(x,y,z)}{,} \text{ con } \lambda\in R$$ ✓ Arrastra error

(2) a)
$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)\,sen^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

Primero voy a sacarme el seno cuadrado de encima, porque me molesta.

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)sen^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)\,sen^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}\cdot\frac{(y+1)}{(y+1)}\cdot\frac{(y+1)}{(y+1)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{sen(t)}{t}=1$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)(y+1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2}\cdot\underbrace{\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{sen^2(y+1)}{(y+1)^2}}_{=1}$$

No puede simplemente desaparecer.

Bien, ya quedo algo mas lindo. Veamos iterados asi tenemos un candidato a limite.

$x=1$
$$\lim_{y\to -1}\frac{0\,(y+1)^2}{0^2+(y+1)^2}=\lim_{y\to -1}\frac{0}{(y+1)^2}=\lim_{y\to -1} 0=0$$

TOMAS LISAZO | Hoja 2 LU:1783/21

$y=-1$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot 0}{(x-1)^2+0^2} = \lim_{y\to 1} \frac{0}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} 0 = 0$

Si el limite existe, debe valer 0.
Como creo que existe, voy a acotar.

$$\left| \frac{(x-1)(y+1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} \right| = \left| \frac{(x-1)(y+1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2} \right| \leq |(x-1)| \xrightarrow[(x,y)\to(1,-1)]{} 0$$

$$\frac{t^2}{t^2+m^2} \leq 1$$

Distribuir el módulo antes de acotar

Por lema de sandwich, como $|(x-1)|$ tiende al 0 cuando (x,y) tienden al $(1,-1)$, y demostramos que es "una funcion mas grande" que $|f|$ entonces f tambien tiende al 0.

Equivalentemente, podemos hallar la relacion epsilon delta y demostrar el limite por definicion.

Ok, pero si vas a hablar de la def., hacelo completo.

$$|(x-1)| \leq \|(x,y)\| \leq \delta \to \boxed{\delta < \varepsilon}$$

$|x-1| \leq \|(x,y)\|$
$|y+1| \leq \|(x,y)\|$

De todas formas, el limite existe y vale 0.

⑥ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{(x-3)\sqrt{|y|}\,(x+2)}{y+(x-3)^2}$

Este limite si que se ve feo, y eso me dice que no existe.
Vamos a ver que pasa con los iterados.

$x=3$ $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{0\sqrt{|y|}\cdot 5}{y+0^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

$y=0$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot 0\cdot (x+2)}{0+(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{0}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} 0 = 0$$

Si el limite existe (que creo que no), debe valer 0.

Voy a probar un par de curvas.

$x=|y|^{\frac{1}{2}}+3$

$$\lim_{y\to 0} \frac{(|y|^{\frac{1}{2}}+3-3)\sqrt{|y|}\,(|y|^{\frac{1}{2}}+3+2)}{y+(|y|^{\frac{1}{2}}+3-3)^2}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{|y|^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}}(|y|^{\frac{1}{2}}+5)}{y+(|y|^{\frac{1}{2}})^2} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}}(|y|^{\frac{1}{2}}+5)}{y+|y|}$$

Si $y<0$, esto se anula, por lo que la función no existe sobre esa curva. si $y\to 0^-$

$|y|^{1/2}\cdot|y|^{1/2}=|y|$

$$\lim_{y\to 0} \frac{|y|^{\frac{1}{2}}|y|^{\frac{1}{2}}(|y|^{\frac{1}{2}}+5)}{2y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{2y}(|y|^{\frac{1}{2}}+5)$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{|y|^{\frac{1}{2}}+5}{2} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{5}{2} = \frac{|0|^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

Por una curva dio $\frac{5}{2}$, pero al aproximarme por iterados dio 0. Por lo tanto, el limite no existe.

(3)

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^4-x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Para ver si F es diferenciable analicemos sus derivadas parciales y veamos donde son continuas. Si las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$, F es C^1, y si F es C^1 entonces F es diferenciable.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}(y^4-x^3)+3x^2\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)}$$

TOMAS
LISAZO

Hoja 3
LU:1783/21

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}(y^4-x^3) - 4y^3\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

Las raices de ambas derivadas siempre tienen algo positivo adentro, asi que no nos van a causar problemas. El verdadero problema esta en los denominadores, que se pueden anular en el (0,0). Fuera de ese punto, al ser funciones polinomicas, parece ser diferenciable, asi que analicemos la diferenciabilidad en el (0,0) a ver si conseguimos todo $\mathbb{R}^2$.

parciales?

Primero, necesitamos un candidato a plano tangente en el (0,0), y para eso usamos las derivadas.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0^4-h^3}{\sqrt{h^2+0^2}}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{h^3}{|h|h} = \lim_{h \to 0} -h = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^4-0^3}{\sqrt{0^2+h^2}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^4}{|h|h} = \lim_{h \to 0} h^2 = 0$$

Candidato a plano tangente $z=0$

Pongamoslo a prueba.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{y^4-x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

Como lo veo medio facil, voy con polares.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{r^4 \text{sen}^4(\theta) - r^3\cos^3(\theta)}{r \cdot r} = \lim_{r \to 0} r\left(r\,\text{sen}^4(\theta) - \cos^3(\theta)\right)$$

Es facil ver que cuando r tiende a 0, f va a tender a 0.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{r}\,(\underbrace{r\,sen^4(\theta)}_{\to 0}-\underbrace{cos^3(\theta)}_{-1\leq\ \leq 1}) \longrightarrow 0\cdot \text{acotado}$$

El limite existe y vale 0, por ende f es diferenciable en el (0,0).

Finalmente, f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ ✓

4) a) Como f es diferenciable, todas sus derivadas direccionales tienen la pinta de $\langle \nabla f, v \rangle$, con v la direccion.

Sabemos los valores de dos derivadas direccionales, asi que usando un poco de ingenieria inversa podemos encontar ∇f.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1)=0 \iff \left\langle \nabla f(-1,1), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\right\rangle = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Puedo usar esto en la otra ecuacion $\longmapsto$ $\underline{3\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)}$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1)=2 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\frac{3}{5} + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{4}{5} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\frac{3}{5} + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\frac{4}{5}\cdot 3 = 2$$

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 2 \iff \underline{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{2}{3}}$$

Bien, encontramos una, y con ese dato despejamos la otra.

TOMAS
LISAZO

Hoja 4
LU: 1783/21

$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{2}{3}$

$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,1) = 2 \Longleftrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{4}{5} = 2$

$\frac{2}{5} + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{4}{5} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\frac{4}{5} = \frac{8}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2$

Finalmente, el gradiente de f en el $(-1,1)$ es

$\nabla f(-1,1) = (\frac{2}{3}, 2)$

(b) El plano tangente al grafico de $g(s,t)$ en el $(0,1)$ esta dado por

$$z = g(0,1) + \frac{\partial g}{\partial s}(0,1)s + \frac{\partial g}{\partial t}(0,1)(t-1)$$

Busquemos cada termino y luego reemplacemos.

$g(0,1) = ¿?$

$g(0,1) = f(0^2(1+1) - e^0, 0^2+1^2) = f(-1,1)$

Convenientemente, conocemos $f(-1,1)$, ya que

$\lim_{t\to 2} f(e^{t-2}-t, t^3-3t-1) = 16$

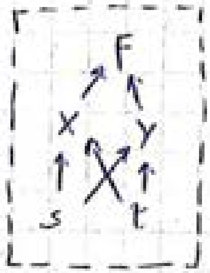
$f(e^{2-2}-2, 2^3-3\cdot 2-1) = 16$

$f(-1,1) = 16 \Rightarrow g(0,1) = \boxed{16}$

$\frac{\partial g}{\partial s}(0,1) = ¿?$

Si llamamos (x,y) a las variables de entrada de F, podemos escribir,

$$\begin{tikzcd} (s,t) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g"'] & (x,y) \arrow[r, "F"] & r \end{tikzcd} \implies$$



Sabemos, por regla de la cadena, que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,1) = \frac{\partial F}{\partial x}(-1,1)\,\frac{\partial x}{\partial s}(0,1) + \frac{\partial F}{\partial y}(-1,1)\,\frac{\partial y}{\partial s}(0,1)$$

Tambien, por el ejercicio 4 a, conocemos a $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,1)$ y a $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,1)$. Es decir,

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,1) = \frac{2}{3}\,\frac{\partial x}{\partial s}(0,1) + 2\,\frac{\partial y}{\partial s}(0,1)$$

Sabiendo que $x = s^2(t+1) - e^s$ y $y = s^2 + t^2$, derivemos y evaluemos.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2(t+1)s - e^s \implies \frac{\partial x}{\partial s}(0,1) = -1$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2s \implies \frac{\partial y}{\partial s}(0,1) = 0$$

Juntando todo, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,1) = -1\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot 0 = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Analogamente, busquemos la otra derivada.

TOMAS LISAZO

Hojo 5

LU: 1783/21

$\frac{\partial g}{\partial t}(0,1) = ¿?$

Otra vez, por regla de la cadena, sabemos que

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0,1) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)}_{\frac{2}{3}}\frac{\partial x}{\partial t}(0,1) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)}_{2}\frac{\partial y}{\partial t}(0,1)$$

Consigamos el resto.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = s^2 \implies \frac{\partial x}{\partial t}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2t \implies \frac{\partial y}{\partial t}(0,1) = 2$$

Uniendo todo,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0,1) = \frac{2}{3}\cdot 0 + 2\cdot 2 = \boxed{4}$$

Por ultimo, volvemos a la ecuacion del principio y reemplazamos todo.

$$z = g(0,1) + \frac{\partial g}{\partial s}(0,1)s + \frac{\partial g}{\partial t}(0,1)(t-1)$$

$$\boxed{z = 16 + \frac{2}{3}s + 4(t-1)}$$