Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)
1er. cuatrimestre 2022

PRIMER PARCIAL - 14/05/2022
Tema 3

Recuerde justificar todas las respuestas.

1	2	3	4	Nota
2	3	3	2	10

Nombre y Apellido: IVO [redacted] L.U.: [redacted] Turno: [redacted]

[redacted]

1. (2 puntos) Sea C la curva que se obtiene al intersecar las superficies:

$$(z-y)^2 + x^2 = 2 \quad \text{y} \quad x = z + y$$

   (a) Dar una parametrización de C.

   (b) Dar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 0, 1)$.

2. (3 puntos) Analizar la existencia de los siguientes límites. Si existen, dar su valor.

   (a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)y\,\mathrm{sen}(x^4)}{x^4+y^2}$,

   (b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x(y-1)^4}{x^2+3(y-1)^8}$.

3. (3 puntos) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y + xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Analizar la diferenciabilidad de f en el $(0,0)$.

   (b) Encontrar las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$ a lo largo de cualquier dirección.

4. (2 puntos) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $g(u,v) = f(e^v + \sin u, e^v + \cos u)$. Sabemos que el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 2, f(1,2))$ está dado por

$$3x + y - z = 4.$$

   Hallar el plano tangente al gráfico de g en el punto $(0, 0, g(0,0))$.

1) a) Parametrización de intersecar las superficies:

$$(z-y)^2 + x^2 = 2 \quad y \quad x = z + y$$

Propongo:
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos t + \operatorname{sen} t \\ y &= \operatorname{sen} t \\ z &= \cos t \end{aligned}}$$

Bueno...
(estaría mejor que cuentes qué te llevó a proponer eso)

Pues vemos que:

$$x = z + y$$
$$\boxed{\cos t + \operatorname{sen} t = \cos t + \operatorname{sen} t} \checkmark$$

y $(z-y)^2 + x^2 = 2$

$$(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t + \operatorname{sen} t)^2 =$$
$$= \cos^2 t \cancel{- 2 \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \cancel{+ 2 \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^2 t =$$
$$= \underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{1} + \underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{1} =$$
$$= \boxed{2 = 2} \checkmark$$

Bien

$$\therefore \boxed{r(t) = (\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \cos t)} \quad t \in [0, 2\pi]$$

b) Vemos $\boxed{r'(t) = (-\operatorname{sen} t + \cos t, \cos t, -\operatorname{sen} t)}$

Pero antes vemos la parametrización de c en el punto $(1,0,1)$

$$\left.\begin{aligned} \cos t + \operatorname{sen} t &= 1 \\ \operatorname{sen} t &= 0 \\ \cos t &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ vemos que } \boxed{t = 0} \text{ pues... } \begin{aligned} \cos(0) + \operatorname{sen}(0) &= 1 \\ \operatorname{sen}(0) &= 0 \\ \cos(0) &= 1 \end{aligned}$$

Ahora vamos $r'(0) = \left(-sen(0)+cos(0), cos(0), -sen(0)\right)$

$r'(0) = (1, 1, 0)$

$L = \lambda\, r'(t_0) + r(t_0)$

$\boxed{L = \lambda(1,1,0) + (1,0,1)}$ → Ecuación de la recta tangente. Bien

2) Analizar la existencia de límites, si existen dar su valor:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)\cdot y\cdot sen(x^4)}{x^4+y^2} =$

Analicemos iterados:

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{(x-1)\cdot y\cdot sen(x^4)}{x^4+y^2} = \frac{0}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \boxed{0}$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\cdot y\cdot sen(x^4)}{x^4+y^2} = \frac{0}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \boxed{0}$

Candidato: 0. Si el límite existe tiene que ser 0 ok

Lo pruebo por sandwich: Dale

$|sen(x^4)| \leq |x^4|$

$\left|\frac{(x-1)\cdot y\cdot sen(x^4)}{x^4+y^2}\right| \leq \frac{|(x-1)|\cdot|y|\cdot|x^4|}{|x^4+y^2|} \leq |x-1|\cdot|y|$

$\to \leq 1$ Bien porque $y^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{x^4}{x^4+y^2}\right) \leq 1$

$|x-1|\cdot y \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \boxed{0}$

$\therefore\ 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)\cdot y\cdot sen(x^4)}{x^4+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x-1|\cdot y \leq 0$

El límite existe y es 0 Bien!

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x\cdot(y-1)^4}{x^2+3\cdot(y-1)^8}$

Analizamos iterados:

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to1}\frac{x\cdot(y-1)^4}{x^2+3(y-1)^8} = \frac{0}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^2} = \boxed{0}$$

$$\lim_{y\to1}\left(\lim_{x\to0}\frac{x\cdot(y-1)^4}{x^2+3\cdot(y-1)^8} = \frac{0}{3\cdot(y-1)^8}\right) = \lim_{y\to1}\frac{0}{3\cdot(y-1)^8} = \boxed{0}$$

Candidato: 0. Si el límite existe tiene que dar cero.

Sospecho que no existe. Buena intuición!

Luego de probar con varias curvas y rectas, ...

Pruebo con la curva: $r(t) = (t^4, t+1)$ Ajá!

$$\lim_{t\to0}\frac{t^4\cdot(t+1-1)^4}{(t^4)^2+3\cdot(t+1-1)^8} = \lim_{t\to0}\frac{t^4\cdot t^4}{t^8+3\cdot t^8} =$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\cancel{t^8}}{4\cancel{t^8}} = \boxed{\frac{1}{4}} \neq 0 \to$$ Como es distinto de cero, que era nuestro candidato, podemos afirmar que el límite no existe. Bien!

3) Analizar la diferenciabilidad en el (0,0):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 \cdot y + x \cdot y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Para que f sea diferenciable, deben existir sus derivadas parciales

Veamos:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,0) - 0}{h} =$

$= \quad$ C.A $\dfrac{3 \cdot h^2 \cdot 0 + h \cdot 0^2}{h^2+0^2} = \dfrac{0}{h^2} = 0$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = \boxed{0}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - 0}{h} =$

$= \quad$ C.A $\dfrac{3 \cdot 0^2 \cdot h + 0 \cdot h^2}{0^2+h^2} = \dfrac{0}{h^2} = \boxed{0}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = \boxed{0}$

...puede ser...

Perfecto, existen las derivadas parciales de f, por lo tanto f es diferenciable (se cumple la condición inicial, ahora hay que ver si efectivamente es diferenciable) (necesaria?)

puede que tenga derivadas y no sea dif...

Ahora analizamos la diferenciabilidad de f en el (0,0)

Para ver que exista la diferenciabilidad de f en el (0,0), se tiene que cumplir que el

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) - f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

de cero. Pero

Veamos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2\cdot y + x\cdot y^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

Analicemos iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{3x^2\cdot y + x\cdot y^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{x^2\cdot\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2\cdot\sqrt{x^2}} = \boxed{0}$$ ✓

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cdot y + x\cdot y^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{y^2\cdot\sqrt{y^2}}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2\cdot\sqrt{y^2}} = \boxed{0}$$ ✓

Como era de esperar, el candidato es cero. Claro!

sigue...

Probamos con la curva $r(t) = (t, t)$

y vemos que...

$$\lim_{t\to 0} \frac{3 \cdot t^2 \cdot t + t \cdot t^2}{(t^2+t^2) \cdot \sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{3 \cdot t^3 + t^3}{2t^2 \cdot \sqrt{2t^2}} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{4t^3}{2t^2 \cdot \sqrt{2} \cdot |t|} = \lim_{t\to 0} \frac{{}^{2}\cancel{4}\cancel{t^3}}{\cancel{2}\cancel{t^3} \cdot \sqrt{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Como nos dio un número distinto de cero, concluimos que f no es diferenciable en el $(0,0)$ Perfecto.

b) Para encontrar las derivadas direccionales de f en el pto $(0,0)$ a lo largo de cualquier dirección, tenemos que considerar un vector normalizado $u = \langle a, b \rangle$ y ver el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h.a, y_0+h.b) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h.a, h.b) - 0}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3.(h.a)^2.(h.b) + (h.a).(h.b)^2}{((h.a)^2 + (h.b)^2).h} = \lim_{h\to 0} \frac{3.h^2.a^2.h.b + h.a.h^2.b^2}{(h^2.a^2 + h^2.b^2).h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3.(3.a^2.b + a.b^2)}{(h^2.(a^2+b^2)).h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^3}.(3.a^2.b + a.b^2)}{\cancel{h^3}.(a^2+b^2)}$$

sigue...

$$\lim_{h \to 0} \frac{3.a^2.b + a.b^2}{a^2+b^2} = \boxed{\frac{3.a^2.b+a.b^2}{a^2+b^2 = 1}}$$

Las derivadas direccionales de f en el pto (0,0), están dadas

por $\boxed{\dfrac{3.a^2.b + a.b^2}{a^2+b^2}}$, siendo $u = \langle a,b \rangle$
un vector normalizado

4) Hallar el P.T. al gráfico g en el pto $(0,0,g(0,0))$

Vamos por partes:

Sabemos que el PT al gráfico de f en el punto $(1,2,f(1,2))$ está dado por $3x+y-z=4$

Vamos a reescribirlo: Dale...

$$z = 3x+y-4$$

$$z = 3.(x+1) - 3 + 1.(y-0) - 4$$

$$z = \underbrace{3}_{\frac{\partial f}{\partial x}}.(x+1) + \underbrace{1}_{\frac{\partial f}{\partial y}}.(y-0) - 7$$

si verificamos esto en el pto $(1,2,f(1,2))$
da $7 = 3.(1+1) + 1.(2-0) - 7$
$\boxed{7=1}$

Antes que nada, definimos:
" $e^v + \sin u$ " como X
" $e^v + \cos u$ " como Y

Bien

El plano tangente al gráfico g, está dado por (que existe por ser g diferenciable...)

$\pi_g: g(0,0) + g_u(0,0) \cdot (x-0) + g_v(0,0) \cdot (y-0)$

$\pi_g: f(1,2) + 3 \cdot x + 4 \cdot y$

$\pi_g: 1 + 3x + 4y$

$z = 3x + 4y + 1$ Bien

$\pi_g (0,0,g(0,0)) \to \pi_g (0,0,1) \to z = 3x + 4y + 1$

$1 = 3.0 + 4.0 + 1$

$1 = 1$ ✓

verificado

$F \begin{cases} x \begin{cases} u \\ v \end{cases} \\ y \begin{cases} u \\ v \end{cases} \end{cases}$ Bien

$z = f(1,2) = 3x + y - 4$

$z = 3.1 + 2 - 4$

$z = 1$

- $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$

$= 3 \cdot \cos(u) + 1 \cdot (-\operatorname{sen}(u))$

(lo marqué antes del PT de f)

$= 3 \cdot \cos(u) - \operatorname{sen}(u)$

$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 3 \cdot \cos(0) - \operatorname{sen}(0)$

$= 3 \cdot 1 - 0 = \boxed{3}$

$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$

$= 3 \cdot e^v + 1 \cdot e^v$

$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = 3 \cdot e^0 + 1 \cdot e^0 = 3 + 1 = \boxed{4}$