FINAL 12/5/10 ✓

① SEA $f(x,y) = (x \cdot y, \ln xy^2)$ Y SEA $D \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, D REGIÓN ELEMENTAL

PROBAR Q EL ÁREA DE $f(D)$ ES IGUAL AL ÁREA DE D WOW!

② DEMOSTRAR EL TEOREMA DE MULTIPL. DE LAGRANGE EN $\mathbb{R}^3$ CON UNA SOLA LIGADURA.

③ DEMOSTRAR Q SI $f \in C^2 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}^2, f_{xy}(p) = f_{yx}(x)$

④ SEA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA, PROBAR Q EXISTE UN PUNTO EN EL GRÁFICO DE f

TAL QUE SU DISTANCIA AL ORIGEN ES MÍNIMA WOW.

12/05/10

"D^*"

① Sea $f(x,y)=(xy\,;\ \ln(xy^2))$. $D \subseteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\ \ y>0\}$

D región elemental

Probar que el area de $f(D)$ es igual al area de D

Quiero probar que $\iint_{f(D)} 1 = \iint_D 1$

D elemental $\Rightarrow$ D acotado

$$J_F = \det\begin{pmatrix} y & x \\ 1/x & 2/y \end{pmatrix} = \boxed{1}$$

Cambio de Variable

$J_F(D^*)\neq 0$

D - elemental

1 - integrable

$$\Rightarrow \iint_{f(D)} 1 = \iint_D (1\circ f)\cdot J_f$$

$f - C^1$ e inyectiva

$$\boxed{\iint_{f(D)} 1} = \iint_D (1\circ f)\cdot J_F = \iint_D J_F = \boxed{\iint_D 1}$$

② Demostrar el teorema de multiplicadores de Lagrange en $\mathbb{R}^3$ con una sola ligadura

f derivable

$g\in C^1$ y $\nabla g\neq(0,0,0)$.

Supongo que $\frac{\partial g}{\partial z}(P)\neq(0,0,0)$

$P=(P_1,P_2,P_3)$ máximo de f restringida a $S=\{g(x)=c\}$

$\Rightarrow$ Por Teorema de la Función implícita, $\exists$ U, V φ, U centrado en (P_1,P_2) y V centrado en P_3 tal que $\varphi(P_1,P_2)=P_3$.

Como P es un máximo de f restringido a $S=\{g(x)=c\}$, vale que

$$f(P_1,P_2,P_3)\geq f(P_1',P_2',P_3').$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_1,P_2,\varphi(P_1,P_2)) = \langle\nabla f(P),\ (1,0,\varphi'(P_1,P_2))\rangle = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_1,P_2,\varphi(P_1,P_2)) = \langle\nabla f(P),\ (0,1,\varphi'(P_1,P_2))\rangle = 0$$

$(1,0,\varphi'(P_1,P_2))$ y $(0,1,\varphi'(P_1,P_2))$ son los vectores normales a la curva de nivel S. O sea, ∇f debe ser linealmente dependiente con el ∇g

Pues $\nabla f\perp N(S)\perp\nabla g \Rightarrow \boxed{\nabla f \parallel \nabla g.}$

② bien hecho

Sea $G(x,y) = g(x,y,\varphi(x,y))$. G es cte al rededor de (P_1,P_2) pues $(P_1,P_2,P_3) \in S$.

$\Rightarrow \nabla G(P_1,P_2) = 0$

Como $F(x,y) = f(x,y,\varphi(x,y))$ tiene un extremo en (P_1,P_2) $\Rightarrow$ (pues P_1,P_2,P_3 es extremo)

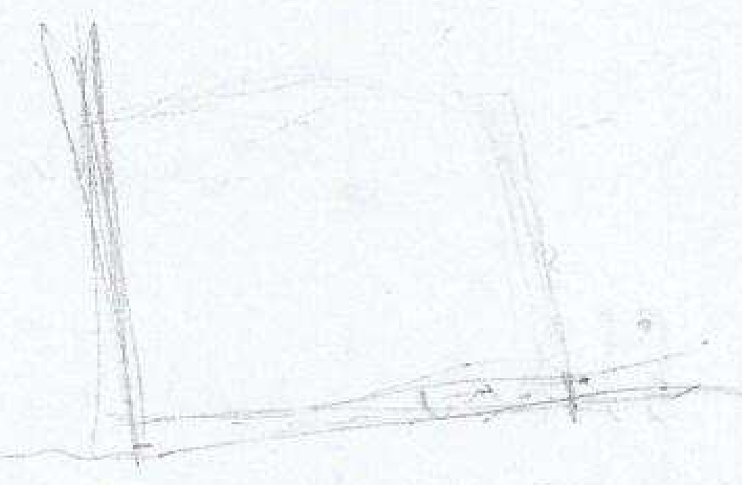
$\Rightarrow \nabla F(P_1,P_2) = 0$

$$G_x(P) = g_x(P)\cdot 1 + \cancel{g_y(P)\cdot 0} + g_z(P)\cdot\varphi'(P_1,P_2) = 0$$

$$G_y(P) = \cancel{g_x(P)\cdot 0} + g_y(P)\cdot 1 + g_z(P)\cdot\varphi'(P_1,P_2) = 0$$

$$F_x(P) = f_x(P)\cdot 1 + \cancel{f_y(P)\cdot 0} + f_z(P)\cdot\varphi'(P_1,P_2) = 0$$

$$F_y(P) = \cancel{f_x(P)\cdot 0} + f_y(P) + f_z(P)\cdot\varphi'(P_1,P_2) = 0$$



$$G_x(P) = \langle \nabla_g(P), (1,0,\varphi'(P_1,P_2)) \rangle = 0$$

$$G_y(P) = \langle \nabla_g(P), (0,1,\varphi'(P_1,P_2)) \rangle = 0$$

$$F_x(P) = \langle \nabla_F(P), (1,0,\varphi'(P_1,P_2)) \rangle = 0$$

$$F_y(P) = \langle \nabla_F(P), (0,1,\varphi'(P_1,P_2)) \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ Sea π el plano generado por los vectores $(1,0,\varphi'(P_1,P_2))$, $(0,1,\varphi'(P_1,P_2))$

$\Rightarrow \nabla_f \perp \pi \perp \nabla_g \Rightarrow \nabla_F \,//\, \nabla_g \Rightarrow$ Tesis

—— o ——

③ Demostrar que si $f \in C^2 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}^2 \; f_{xy}(p) = f_{yx}(p)$

—— o ——

④ Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que un punto en el gráfico de f tal que su distancia al origen es mínima

$gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ Sea $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ la función distancia de (x,y) a $(0,0)$

$\Rightarrow \forall p \in gr(f)$, $d(p) = \sqrt{p^2 + f(p)^2}$. Quiero ver que esta función tiene un mínimo. $d(P)$ tiene un mínimo $\iff d^2(P) = P^2 + f(P)^2$ tiene un mínimo global. $d^2(P)$ es composición de continuas.

$\text{Im}(d^2)$ es un conjunto acotado inferiormente. Sea $i = \inf(\text{Im}(d^2))$.

Quiero ver que i es mínimo. Supongo que i no es mínimo. $\Rightarrow \nexists\, m \in \mathbb{R}$ tal que $d(m) = i$

Entonces, existe $\{x_n\}_n \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_n) = i$

12/05/10

Continuación del (4)

Por el teorema de ????, extraigo de $\{X_n\}$ una subsucesión $\{X_{n_j}\}$ monótona.

Supongo $\{X_{n_j}\}$ creciente (el caso decreciente es análogo)

Existen 2 opciones

•) Si $\{X_{n_j}\}$ converge (o sea $\lim_{n_j \to \infty} X_{n_j} = m < \infty$), entonces, como f es

continua $\lim_{n_j \to \infty} d(X_{n_j}) = \lim_{n \to \infty} d(X_n) = d(\lim_{n \to \infty} X_n) = d(m)$

(pues X_{n_j} es subsucesión de X_n)

•) Supongo ahora que $\{X_{n_j}\}$ no converge. O sea $\lim_{n_j \to \infty} X_{n_j} = \infty$.

Luego, como (X_{n_j} es subsucesión de X_n) $\lim_{n_j \to \infty} d(X_{n_j}) = \lim_{n \to \infty} d(X_n)$. (por d continua)

Ergo, como d es continua:

$$\lim_{n_j \to \infty} d(X_{n_j}) = \lim_{n \to \infty} d(X_n) = d(\lim_{n \to \infty} X_n) = \sqrt{\lim_{n \to \infty} X_n + \lim_{n \to \infty} f(X_n)}$$

$$= \sqrt{\infty + \lim_{X_n \to \infty} f(X_n)} = \infty \neq i$$

Luego $d(X_n) \longrightarrow i$ pero $d(X_{n_j}) \longrightarrow \infty$. $\Rightarrow$ Abs