TEMA B

1	2	3	4	Calificación
B / B	B/B	B	B	A

APELLIDO Y NOMBRE:

NRO. DE LIBRETA:

TURNO: PRÁCTICA 4

CARRERA: CS. MATEMÁTICAS

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2019

Segundo Parcial - 06/07/2019

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

---

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = \left(2y^2x - ye^{yx},\ 3y + 2yx^3 - 1\right)$

(a) Probar que existe un entorno U del punto $(0, 1)$, un entorno V de $F(0, 1)$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$ de clase C^1 tal que $F^{-1}(F(0, 1)) = (0, 1)$.

(b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, 1)$ está dado por $P(x, y) = 2 - y + 3x - xy + y^2$. Calcular $D(g \circ F^{-1})(-1, 2)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x^2 - 2y^3 + 3$.

a) Analizar la existencia de extremos (relativos y absolutos) y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$. En caso de que existan, calcularlos.

b) Sea

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$

Analizar la existencia de extremos absolutos de f en R. En caso de que existan, calcularlos.

3. Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia para $\alpha = 3$ y para $\alpha = 4$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha(1 + \cos^2(x))}{\sqrt{x^2 - 1}(x^4 + 2)} dx.$$

4. Sea $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\right\}$. Calcular:

$$\iiint_W (x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

Ejercicio 2:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 2x^2 - 2y^3 + 3$

a) Extremos relativos y absolutos y puntos silla de f en $\mathbb{R}^2$.

Primero busco puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2$.
f es diferenciable, por lo tanto sus puntos críticos son $PC = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \nabla f(x,y) = (0,0)\}$ por Fermat

$\nabla f(x,y) = (4x, -6y^2) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ -6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

El único punto crítico de f en $\mathbb{R}^2$ es $(0,0)$
f es $C^2 \Rightarrow$ intento aplicar criterio del Hessiano

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -12y \end{pmatrix}$ $\quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(Hf(0,0)) = 0$

$\Rightarrow$ el criterio no decide si $(0,0)$ es extremo o no

Pruebo por curvas

- (t,t)

$h(t) = f(t,t) = 2t^2 - 2t^3 + 3$

$h'(t) = 4t - 6t^2 \qquad h'(0) = 0$

$h''(t) = 4 - 12t \qquad h''(0) = 4$

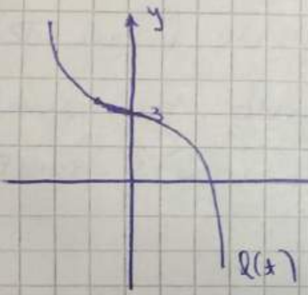
por criterio de la derivada segunda, f tiene un mínimo sobre la curva (t,t) en $(0,0)$

Si encuentro una curva sobre la cual no es un mínimo pruebo que en $(0,0)$ hay un punto silla

- $(0,t)$

$$l(t) = f(0,t) = -2t^3+3$$

Por estudio de funciones sé que $l(t)$ no alcanza ni mínimo ni máximo en $t=0$



$\Rightarrow$ sobre la curva $(0,t)$ f tiene un punto silla en $(0,0)$

Si fuera un mínimo debería serlo sobre todas las curvas

Por lo tanto, en $(0,0)$ hay un Punto silla y $f(0,0)=3$

El único punto crítico de f en $\mathbb{R}^2$ era el $(0,0)$ por lo tanto f no tiene máximos ni mínimos locales.

Por otro lado, tomando nuevamente la curva $(0,t)$

$$f(0,t) = -2t^3+3$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(0,t) = \lim_{t\to+\infty} -2t^3+3 = -\infty$$

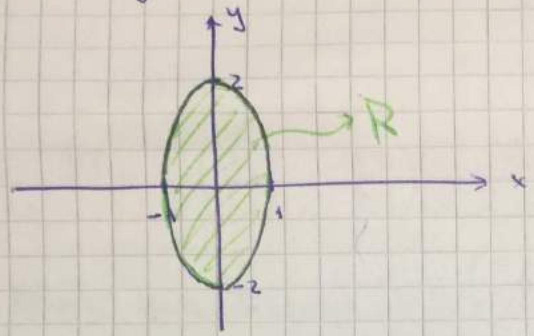
$$\lim_{t\to-\infty} f(0,t) = \lim_{t\to-\infty} -2t^3+3 = +\infty$$

f no está acotada, por lo tanto no alcanza ni máximo ni mínimo absoluto en $\mathbb{R}^2$.

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$

Busco extremos absolutos de f en R.

Dibujo R:



La región R es cerrada y acotada (compacta) y f es continua
$\Rightarrow$ Por Weierstrass f alcanza máx y mín absoluto en R.

Analizo primero en $\overset{\circ}{R} = \{x^2 + \frac{y^2}{4} < 1\}$

Para ello busco los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2$ y me quedo con los que caen en $\overset{\circ}{R}$. Ya lo hice en a) ~~punto~~ El único punto crítico de f en $\mathbb{R}^2$ es $(0,0)$ y cae en $\overset{\circ}{R}$ pues $0^2 + \frac{0^2}{4} < 1$. Lo tomo como punto crítico aunque sea punto silla ya que si no es extremo absoluto lo descartaré evaluando.

$$PC_1 = (0,0)$$

Ahora analizo $\partial R = \{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ para eso uso multiplicadores de Lagrange.

Sea $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$ C^1, si f tiene extremos restringidos a $g(x,y) = 0$ y $\nabla g(x,y) \neq 0$, entonces esos puntos cumplen $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$.

$\nabla g(x,y) = \left(2x, \frac{y}{2}\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ No cae en ∂R así que no hay problema. No es punto crítico.

Busco los puntos que cumplen

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ y $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x = \lambda . 2x \\ -6y^2 = \lambda \frac{y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Si $x = 0$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -6y^2 = \lambda \frac{y}{2} \\ \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \quad y^2 = 4 \quad \begin{array}{l} \nearrow y = 2 \\ \searrow y = -2 \end{array}$$

$y = 2$

$-6 . 2^2 = \lambda . \frac{2}{2}$

$-24 = \lambda$

$y = -2$

$-6(-2)^2 = \lambda . \frac{-2}{2}$

$24 = \lambda$

No son absurdos

$\Rightarrow PC_2 = (0,2) \quad PC_3 = (0,-2)$

Si $x \neq 0$

$4x = \lambda 2x$

$4x - \lambda 2x = 0$

$x(4 - 2\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2$

$\Rightarrow -6y^2 = \cancel{2} . \frac{y}{\cancel{2}}$

$-6y^2 = y$

$-6y^2 - y = 0$

$-y(6y+1) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow y = 0 \\ \searrow y = -\frac{1}{6} \end{array}$

$y = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$PC_4 = (1,0) \quad PC_5 = (-1,0)$

$y = -\frac{1}{6}$

$x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^2}{4} = 1 \qquad x^2 + \frac{1}{144} = 1$

$x^2 = \frac{143}{144}$

$x = \pm \frac{\sqrt{143}}{12}$

$PC_6 = \left(\frac{\sqrt{143}}{12}, -\frac{1}{6} \right) \qquad PC_7 = \left(-\frac{\sqrt{143}}{12}, -\frac{1}{6} \right)$

Ahora que despejé todos los puntos posibles, me resta evaluar f en todos los puntos ya que Weierstrass me asegura la existencia del máx y mín.

PC_1: $f(0,0) = 3$

PC_2: $f(0,2) = 2.0 - 2.2^3 + 3 = -13$ MÍN

PC_3: $f(0,-2) = 2.0 - 2.(-2)^3 + 3 = 19$ MÁX

PC_4: $f(1,0) = 2.1 - 2.0^3 + 3 = 5$

PC_5: $f(-1,0) = 2(-1)^2 - 2.0^3 + 3 = 5$

PC_6: $f\left(\frac{\sqrt{143}}{12}, -\frac{1}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{143}}{12}\right)^2 - 2.\left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3 = \frac{1079}{216} \approx 4,9$

PC_7: $f\left(-\frac{\sqrt{143}}{12}, -\frac{1}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{143}}{12}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3 = \frac{1079}{216}$

Rta:
f alcanza máx absoluto en $(0,-2)$ y es 19 en R
f alcanza mín absoluto en $(0,2)$ y es -13 en R.

Ej 3: analizar convergencia para $\alpha=3$ y $\alpha=4$

$\alpha = 3$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$$

- Veo los puntos conflictivos

El denominador se anula si $x^2=1 \to x=1$, $x=-1 \notin [1,+\infty)$

La integral se indefine únicamente en $x=1$ y $x \to +\infty$

$x^3 > 0$ en $[1,+\infty)$

$\cos^2(x) \geq 0 \therefore \cos^2(x)+1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2-1}$ es positiva

x^4+2 es positiva

$\Rightarrow \dfrac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}$ es positiva, por lo tanto puedo usar criterios de comparación.

~~Primero separo la integral~~

$$\cancel{\int_1^{+\infty} \frac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx = \int_1^{2} \frac{x^2(1+\cos^2(x))}{}}$$

$\cos^2(x) \leq 1 \Rightarrow 1+\cos^2(x) \leq 2$

$$\therefore \frac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)} \leq \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)} = \frac{2x^3}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\,(x^4+2)}$$

Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x^3}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\,(x^4+2)}\,dx$ converge, entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx \text{ converge}$$

Separo la integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x^3}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\,(x^4+2)}\,dx = \int_1^{2} \frac{2x^3}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\,(x^4+2)}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$$

Ahora tengo un solo problema en cada integral, las estudio por separado.

$$\int_1^{2} \frac{2x^3}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\,(x^4+2)}\,dx$$

Comparo con paso al límite con $\frac{1}{(x-1)^{1/2}}$ sabiendo que

$$\int_1^{2} \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{u^{1/2}}\,du$$ converge pues $1/2 < 1$

$u = x-1$
$du = dx$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{2x^3}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\,(x^4+2)}}{\frac{1}{(x-1)^{1/2}}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{2x^3}{\cancel{(x-1)^{1/2}}(x+1)^{1/2}\,(x^4+2)}}{\frac{1}{\cancel{(x-1)^{1/2}}}} = \frac{2}{6}$$

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \underset{<+\infty}{\neq 0} \Rightarrow$ ambas tienen el mismo comportamiento en 1

$$\therefore \int_1^{2} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$$ converge y $$\int_1^{2} \frac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$$ también.

$$\int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$$

Comparo con paso al límite con $\frac{1}{x^2}$ sabiendo que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ~~conv~~ converge pues $2>1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}\,(x^4(1+\frac{2}{x^4}))} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,x^4(1+\frac{2}{x^4})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{x\cdot x^4\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,(1+\frac{2}{x^4})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,(1+\frac{2}{x^4})} = 2 \neq 0$$
$<+\infty$

$\Rightarrow$ ambos tienen el mismo comportamiento en infinito. $\int_2^{+\infty} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ converge y por lo tanto $\int_2^{+\infty} \frac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ también.

Finalmente, $\int_1^{+\infty} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ converge, lo que me asegura que $\int_1^{+\infty} \frac{x^3(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ sea una integral convergente.

$\alpha = 4$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$$

Al igual que antes, esta integral se indefine en $x=1$ y $x \longrightarrow +\infty$ y es siempre positiva (puedo comparar)

Separo la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx = \int_1^{2} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$$

Estudio primero $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$

$$\frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)} \geq \frac{x^4}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}$$

$$0 \leq \cos^2(x) \leq 1$$

$$1 \leq \cos^2(x)+1 \leq 2$$

entonces, si $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ diverge, diverge también $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$.

Comparo con $\dfrac{1}{x}$ sabiendo que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x^4}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\, x^4\left(1+\frac{2}{x^4}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^5}}{\cancel{x}\cancel{x^4}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^4}\right)} = 1 \neq 0, < +\infty$$

$\Rightarrow$ ambas se comportan igual en $+\infty$

$\Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ diverge y por lo

~~.....~~ tanto $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ también.

Como

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ es positiva, y $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$

diverge, puedo asegurar

que ~~..~~ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4(1+\cos^2(x))}{\sqrt{x^2-1}\,(x^4+2)}\,dx$ DIVERGE.

Rta: la integral converge con $\alpha = 3$

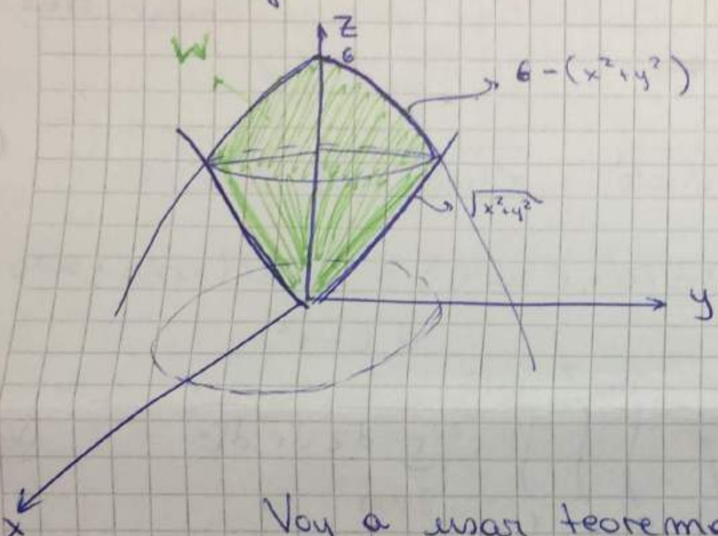
y diverge con $\alpha = 4$

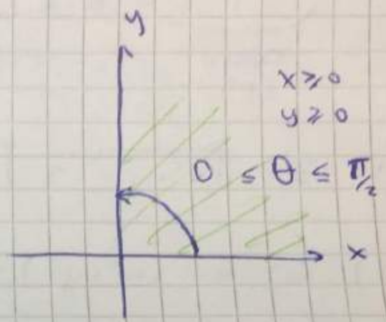
Ejercicio 4:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)\}$$

Calcular $\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

Dibujo W:





Voy a usar teorema de cambio de variable con coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $\quad r > 0$

$J(r,\theta) = r$

Busco la intersección de $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = z \\ 6-(x^2+y^2) = z \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = z \Rightarrow z^2 = (x^2+y^2),\ z > 0 \quad \text{pues } \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \\ 6-(x^2+y^2) = z \Rightarrow 6 - z^2 = z \end{cases}$$

$z^2 + z - 6 = 0$ $\to$ $z = 2$

$\to$ $z = -3$ Descartado pues $z \geq 0$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 6-(x^2+y^2) \end{cases}$$

se intersecan donde $z = 2$:

$$x^2+y^2=4$$

Por lo tanto:

$0 \leq \theta \leq \pi/2$ pues $x \geq 0$, $y \geq 0$

$0 \leq r \leq 2$ pues $x^2+y^2 = 4$ es la curva donde intersecan y la que tiene mayor radio

$$\underbrace{r}_{\substack{\text{cono} \\ (1)}} \leq z \leq \underbrace{6-r^2}_{\substack{\text{paraboloide} \\ (2)}}$$

(1) $z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{r^2} = r$

(2) $z = 6-(x^2+y^2) = 6 - \left(r^2\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) = 6 - r^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) =$

$= 6 - r^2$

$$\Rightarrow \iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_r^{6-r^2} r^2 \cdot \underbrace{r}_{J(r,\theta)}\,dz\,dr\,d\theta = \circledast$$

teorema de cambio de variable

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha = r^2$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_r^{6-r^2} r^3 \, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2} r^3 z \Big|_r^{6-r^2} dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2} r^3\left(\left(6-r^2\right)-r\right) dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2} \left(6r^3 - r^5 - r^4\right) dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{6r^4}{4} - \frac{r^6}{6} - \frac{r^5}{5} \Big|_0^{2} d\theta = \int_0^{\pi/2} 24 - \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \, d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{104}{15} \, d\theta = \frac{104}{15} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{104}{15}\,\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{52}{15}\pi}$$

Rta: $\iiint_W (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{52}{15}\pi$