HOJA N°

FECHA

ANÁLISIS MATEMÁTICO I - MATEMÁTICA I

. ANÁLISIS II para computólogos - etcétera

- Apuntes* de la práctica - Ariel Salort -

VERANO 2017

* Tomados por Daniela 

NOTA

Análisis II

- Ariel Salort
- Paula Escorcielo
- Jesica Maia Numerosky

Inecuaciones en $\mathbb{R}$

- $|2x+1| < 3$

$-3 < 2x+1 < 3 \iff -3-1 < 2x < 3-1$

$\iff -\frac{4}{2} < x < \frac{2}{2}$

$\iff -2 < x < 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 1\} = (2,1)$

- $|-2x+1| \leq |-x+3|$

Recordar: $a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0;\ \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

$\iff$ si $-x+3 \neq 0$:

$\left|\frac{-2x+1}{-x+3}\right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{-2x+1}{-x+3} \leq 1$

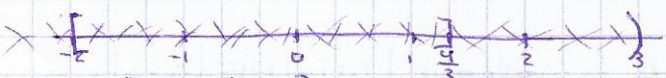
•• Si $-x+3 > 0 \rightsquigarrow 3 > x$

$\iff -(-x+3) \leq -2x+1 \leq -x+3$

$x-3 \leq -2x+1 \leq -x+3 \iff$ si $x-3 \leq -2x+1 \ \wedge\ -2x+1 \leq -x+3$

$3x \leq 4$

$x \leq \frac{4}{3}$ $\qquad -2 \leq x$



$S_1 = \{x \in \mathbb{R} / 3 > x\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{4}{3}\} \cap \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x\} = [-2, \frac{4}{3}]$

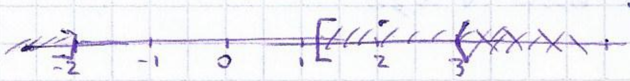
•• Si $-x+3 < 0 \rightsquigarrow 3 < x$

$-(-x+3) \geq -2x+1 \geq -x+3$

$x-3 \geq -2x+1 \geq -x+3 \iff$ $x-3 \geq -2x+1 \ \wedge\ -2x+1 \geq -x+3$

$3x \geq 4$

$x \geq \frac{4}{3}$ $\qquad -2 \geq x$



$S_2 = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{4}{3}\} \cap \{x \in \mathbb{R} / -2 \geq x\} = \emptyset$

•• Si $-x+3 = 0 \rightsquigarrow 3 = x$, obtengo $5 \leq 0$ Abs!

Solución: $S = S_1 \cup S_2 = [-2, \frac{4}{3}] = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq \frac{4}{3}\}$

NOTA

• $|-x+1| \geq 2 \Leftrightarrow -x+1 \geq 2$ ó $-(-x+1) \geq 2$

$-1 \geq x$ $\qquad$ $x-1 \geq 2$

$\qquad\qquad x \geq 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -1 \geq x\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\} = \mathbb{R} \setminus (-1,3)$

/ • Encontrar el conjunto: $\{x \in \mathbb{R} / ||x+1| - |2x+1|| < 2\}$

Reduce[Abs[Abs[x+1] - Abs[2x+1]] <= 2, x, Reals] → Mathematica.

$\Leftrightarrow -2 < |x+1| - |2x+1| < 2$

$\Leftrightarrow -2 + |2x+1| < |x+1| < 2 + |2x+1|$

es equivalente a que

• $-2 + |2x+1| < |x+1|$ $\quad$ y $\quad$ • $|x+1| < 2 + |2x+1|$

$|2x+1| < |x+1| + 2$

$-(|x+1|+2) < 2x+1 < |x+1| + 2$

esto vale si:

$-(|x+1|+2) < 2x+1$ y $2x+1 < |x+1| + 2$

si

$x+1 \geq 0$ ó $x+1 < 0$

$x \geq -1$ $\quad$ $x < -1$

S_1 $\qquad$ S_2 $\qquad$ S_3 $\qquad$ S_4

$S = \bigcap_{i=1}^{4} S_i = (-2,2)$

• Si $a \geq 0$, para qué valores de b vale que $||a| - |b|| = |a-b|$

Esto equivale a: $a - b = |a - |b|| \rightarrow a - b = a - |b|$ ①

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow a - b = |b| - a$ ②

ó

$b - a = |a - |b|| \rightarrow b - a = a - |b|$ ③

$\qquad\qquad\qquad\quad \searrow b - a = |b| - a$ ④

④ = ① $\quad -b = -|b| \Leftrightarrow b = |b| \Rightarrow b \geq 0 \ \forall a \geq 0$

② = ③ $\quad 2a = |b| + b \quad a \geq 0$

si $a = 0 \rightsquigarrow |b| = -b \Rightarrow b \leq 0$ si $a = 0$.

si $a > 0 \rightsquigarrow 0 < 2a = |b| + b \Rightarrow b > 0$ si $a > 0$.

$\therefore$ [si $a = 0$ la igualdad vale $\forall b \in \mathbb{R}$

si $a > 0$ " " vale $\forall b \geq 0$]

• Ver que $\mathbb{R}_{<0}$ no está acotado inferiormente

$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 5\} = [-2, 5)$ es acotado

$B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1, +\infty)$ no es acotado: es acotado inf. pero no sup.

$C = \{n \in \mathbb{N} / n \geq 3\} \rightarrow$ no es acotado.

$\mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\} = (-\infty, 0] \longrightarrow$ no es acotado inf.

Probémoslo por reducción al absurdo.

Supongo que $\mathbb{R}_{<0}$ es acotado inferiormente $\Rightarrow \exists\, c > -\infty / c < x \;\; \forall x \in \mathbb{R}_{<0}$ (*)

pero $c < x < 0 \Rightarrow -\infty < c < 0$

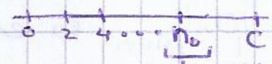
Observemos que $\underbrace{c-1}_{=x_0} < c < 0 \Rightarrow x_0 = c-1 \in \mathbb{R}_{<0}$ y $x_0 < c$,

lo cual contradice (*) Abs! $\blacksquare$

• Ver que $A = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par}\}$ no está acotado superiormente.

Supongo que A está acotado superiormente. Entonces,

$\exists\, c < \infty / n \leq c \;\; \forall n \in A$ (*)



↳ último n par antes que C (impar)

Llamo $n_0 = \max_{n \in \mathbb{N}} \{n \in A, n \leq c\}$

$\Rightarrow |n_0 - c| < 2$

Observo que $n_1 = n_0 + 2 \in A$ y $n_0 \leq c < n_1$, Absurdo, ya que contradigo (*)

$\therefore$ A no es acotado superiormente

• Con esto se puede hacer hasta el ej. 10 de la guía.

① Sea $A=\{x\in\mathbb{R}_{>0} / x^2>3\}$. Decidir si es acot. sup. e inf.

Hallar (si existen) supremo e ínfimo.

$A=\{x\in\mathbb{R}_{>0} / x^2>3\}=\{x\in\mathbb{R}_{>0} / x>\sqrt{3}\}=(\sqrt{3},+\infty)$.

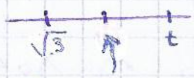
Rta: A no es acot. superior (TAREA)

A sí es acot. inferior:

Veamos que $\sqrt{3}=\inf A$:

- $\sqrt{3}$ es cota inf.
- Veamos que es la mayor de las cotas inf:

Supongamos que $\exists\, t\in\mathbb{R}$ cota inf. de A con $t>\sqrt{3}$



$\boxed{\text{Como } t \text{ es cota inf.} \Rightarrow t<x \ \forall x>\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}+t}{2}>\sqrt{3}$

$\sqrt{3}+t>2\sqrt{3}$

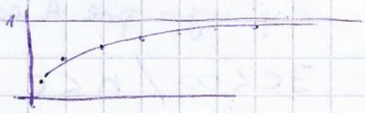
$t>\sqrt{3}$

$\sqrt{3}<\frac{\sqrt{3}+t}{2}<t$; $x=\frac{\sqrt{3}+t}{2}\in A$ y $x<t$.

- $\sqrt{3}$ no es mínimo porque $\sqrt{3}\notin A$

② Sea $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\dots\right\}$ hallar sup. e inf.

$A=\left\{\frac{n}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$; $a_n=\frac{n}{n+1}$



Rta: Veamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

qvq $a_n\leq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}\leq\frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ n(n+2)\leq(n+1)^2$

$\Leftrightarrow\ \cancel{n^2}+\cancel{2n}\leq\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1$

$0\leq 1$ ✓

Veamos que $\{a_n\}_n$ es acot. sup: $a_n=\frac{n}{n+1}<1 \Rightarrow \exists \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\lim_{n\to+\infty}a_n=1$

$a_1=\frac{1}{2}$

Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, $\frac{1}{2}\leq a_n$

Luego, $\frac{1}{2}$ es cota inf.

Como $\frac{1}{2}\in A \Rightarrow \inf A=\min A=\frac{1}{2}$.

③ $A=\left\{\underbrace{\frac{(-1)^n n+7}{n+4}}_{a_n} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Idem ejercicios anteriores

$A=\{\underbrace{a_{2k} : k\in\mathbb{N}}_{A_1}\}\cup\{\underbrace{a_{2k-1} : k\in\mathbb{N}}_{A_2}\}$ → Separo pares de impares → Para hacer más agradable el ejercicio

Rta: Analizo A_1:

$a_{2k}=b_k=\frac{(-1)^{2k}\cdot 2k+7}{2k+4}=\frac{2k+7}{2k+4}$.

$\lim_{k\to+\infty} b_k=1$. En particular, $\{b_k\}_k$ está acotada.

$b_1=\frac{9}{6}$; $b_2=\frac{11}{8}$; $b_3=\frac{13}{10}$ Veamos que $\{b_k\}_k$ es decreciente (TAREA)

$\sup A_1=b_1=\frac{9}{6}$

$\inf A_1=1$

Analizo A_2:

$a_{2k-1}=C_k=\frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)+7}{2k-1+4}=\frac{-2k+8}{2k+3}$

$\lim_{k\to+\infty} c_k=-1$

$c_1=\frac{6}{5}$, $c_2=\frac{4}{7}$, $c_3=\frac{2}{9}$ Veamos que $\{c_k\}_k$ es decreciente (TAREA)

$\sup A_2=c_1=\frac{6}{5}$

$\inf A_2=-1$

$\sup A=\max\{\sup A_1, \sup A_2\}=\frac{9}{6}=\max A$ (Porque pertenece a A)

$\inf A=\min\{\inf A_1, \inf A_2\}=-1$ no es mínimo. ¿por qué? ⊛

igualo A_1 y A_2 a -1 y busco un k que cumpla con esa condición

de A_2: $\frac{-2k+8}{2k+3}=-1$
de A_1: $\frac{2k+7}{2k+4}=-1$
} no voy a encontrar un k que coincida en ambos casos.

o sea, en A_2 no encuentro solución, y en A_1 encuentro uno $\left(k=-\frac{11}{4}\right)$ que no es par, ni natural.

NOTA

Ejercicio 15 de la guía:

$a_0 > b_0 > 0$

$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$; $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

a) qvq $a_n \geq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$: lo probamos por inducción.

$n=0$: $a_0 > b_0$ ✓

Veamos que si vale para n, vale para $n+1$:

HI: (hipótesis inductiva): $a_n \geq b_n$. qvq $a_{n+1} \geq b_{n+1}$

$a_{n+1} \geq b_{n+1} \iff \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n}$ } esto se pruebo que vale en ej. 6) + HI

$\boxed{\text{Ej. 6}}$ $0 \leq x \leq y$; $a_n = y \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq x = b_n$

Veamos $a_n, b_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ (por inducción)

$n=0$ ✓

HI: $a_n, b_n \geq 0$, qvq $a_{n+1}, b_{n+1} \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq 0$

$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq 0$.

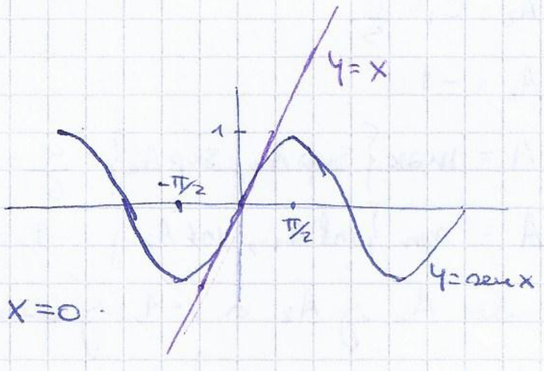
b, c) TAREA

Ejercicio 16 de la guía:

$a_0 > 0$, $a_{n+1} = \operatorname{sen}(a_n)$.

- Obs: Si $x \geq 0$ $\operatorname{sen} x \leq x$

Si $x < 0$ $\operatorname{sen} x \geq x$



Además, $\operatorname{sen} x = x \iff x = 0$.

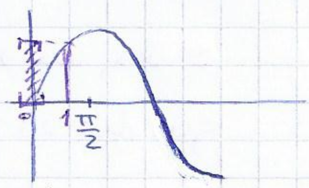
$f(x) = x - \operatorname{sen} x$

$a_1 = \operatorname{sen}(a_0) \in [-1, 1]$ $\qquad$ $a_1 = \operatorname{sen}(a_0) \leq a_0$

Caso $0 \leq a_1 \leq 1$

$a_2 = \operatorname{sen}(a_1) \leq a_1$; $a_1 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a_2 = \operatorname{sen} a_1 \leq 1$

$a_3 = \operatorname{sen} a_2 \leq a_2 \qquad \Rightarrow 0 \leq a_3 \leq 1$



$\operatorname{sen}([0,1]) \subseteq [0,1]$

Por inducción:

$n=1$ ✓ ; HI: $0 \leq a_n \leq 1$, $0 \leq a_{n+1} = \operatorname{sen}(a_n) \leq 1$

en particular, $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

$a_{n+1} = \operatorname{sen}(a_n) \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

FORMAS DE MEDIR DISTANCIA

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

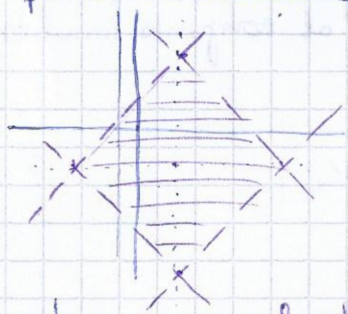
- $\|(x,y)\|_p = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$ con $p > 1$, p fijo.

Obs: Si $p = 2 \Rightarrow$ es la norma euclidea.

- $\|(x,y)\|_\infty = \text{Max}\{|x|, |y|\} \to$ norma infinita
- $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

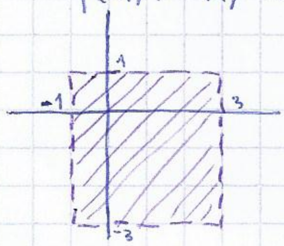
Ejemplo: norma 1

- El gráfico de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x-y) - (1,-1)\|_1 < 2\}$, al hacer las cuentas, queda un rombo de lado 2, centrado en $(1,-1)$



Ejemplo: norma infinito.

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y) - (1,-1)\|_\infty < 2\}$



$\max\{|x-1|, |x+1|\} < 2$

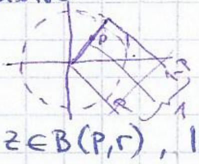
$|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

$|y+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < y+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < y < 1$

Def: • Un conjunto A es abierto si $\forall p \in A \; \exists r > 0 / \overbrace{B(p,r)}^{\text{bola abierta}} \subset A$

- Un conjunto A es cerrado si su complemento es abierto ($\mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto)
- Un conjunto A es acotado si $\exists r > 0 / A \subset B(0,r)$ (si existe una bola que lo contenga, en realidad el centro es indistinto)

Ejemplo: Probar que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto



Dado $p \in A$ considero radio $= \frac{1 - \|p\|_2}{2} = r$

Veamos que $B(p,r) \subset A$, o sea, veamos que $\forall z \in B(p,r)$, $\|z\|_2 < 1$

$\|z\|_2 = \|z - p + p\|_2 \underset{\text{P.T}}{\leq} \|z-p\|_2 + \|p\|_2$

$< r + \|p\|_2$

NOTA

Def: Sea A un conjunto:

- Un punto $p \in A$ es interior si $\exists r > 0 / B(p,r) \subset A$
- Un punto p es exterior a A si es interior al complemento de A ($A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$)

notar que los puntos de la frontera no pertenecen al exterior.

- Un punto p está en la frontera de A (∂A) si $\forall r > 0$ $B(p,r)$ tiene puntos interiores y exteriores.
- Un punto p es un punto de acumulación de A si $\forall r > 0$ $B(p,r)$ contiene algún punto de A diferente a p

Ejemplo: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(3,3)\} \Rightarrow$ el pto $(3,3)$ no es de acumulación, el resto si lo es.

- Llamaremos clausura de A y denotaremos $\overline{A}$ al conjunto formado por todos los puntos de acumulación de A

Ejemplo: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 < 3\}$

Elipse = $\frac{(x-a)^2}{c^2} + \frac{(x-b)^2}{d^2} = 1$.

CUÁDRICAS (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

Def: Una cuádrica es una superficie en $\mathbb{R}^n$ que representa los ceros de un polinomio de grado 2 con n variables.

Ejemplos:
i) $x^2+y^2+z^2-1=0$
ii) $x \cdot y = 0$
iii) $xy+yz-x-y=0$.

CÓNICAS → Cuádricas en $\mathbb{R}^2$

- Circunferencia: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2-1=0$
- Elipse: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0$
- Parábola: $x^2-ay=0$
- Hipérbola: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0$.

CUÁDRICAS EN $\mathbb{R}^3$

- Cono: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=0$
- Hiperboloide:
  - Una hoja: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2-1=0$
  - Dos hojas: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2+1=0$
- Eclipsoide: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1=0$ $\begin{cases} \bullet \text{ si } a=b=c \rightarrow \text{es una esfera.} \\ \bullet \text{ si } a=b \rightarrow \text{es un esferoide.} \end{cases}$
- Paraboloides:
  - Elíptico: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-z=0$
  - Hiperbólico: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-z=0$
- Cilindros
  - Elíptico: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0$
  - Hiperbólico: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0$
  - Parabólico: $x^2-ay=0$.

Obs: Las elípticas son las únicas cuádricas acotadas.

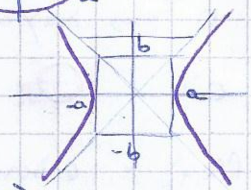
NOTA

PRÁCTICA 2

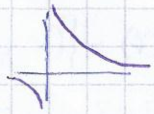
CÓNICAS (salen de intersecar un cono con un plano).

- Elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- Hipérbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



- Hipérbola rectangular: $xy=c$ $(c\neq 0)$ ⟶



- Parábola: $y=ax^2$

① Describir y graficar el dominio de las siguientes funciones.

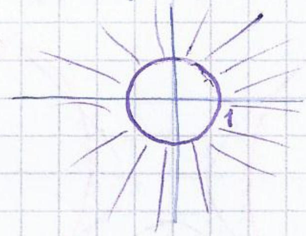
a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$ $\quad f:\mathrm{Dom}f\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$.

$x^2+y^2-1\geq 0$ $\quad \mathrm{Dom}\,f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \|(x,y)\|\geq 1\}$.

$x^2+y^2\geq 1$

$\|(x,y)\|^2\geq 1$

$\|(x,y)\|\geq 1$



b) $f(x,y)=\frac{1}{4x-2y-8}$ $\quad \mathrm{Dom}\,f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\neq 2x-4\}$

$4x-2y-8\neq 0$

$2y\neq 4x-8$

$y\neq 2x-4$

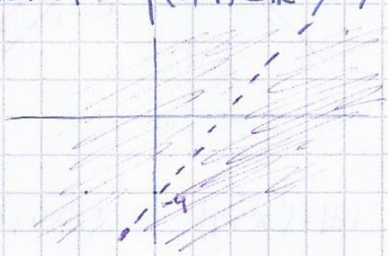


GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN.

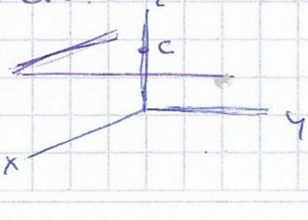
- $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $\mathrm{graf}(f)=\{(x,f(x)) : x\in\mathrm{Dom}f\}\subseteq\mathbb{R}^2$
- $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$; $\mathrm{graf}(f)=\{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in\mathrm{Dom}f\}\subseteq\mathbb{R}^3$

CONJUNTOS DE NIVEL ⟶ $f:\mathrm{Dom}f\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$\{(x,y)\,/\, f(x,y)=c \;;\; (x,y)\in\mathrm{Dom}f\}$ $\quad c=\text{cte}$.

$n=2$: Curvas de nivel

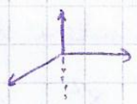
$n=3$: Superficies de nivel

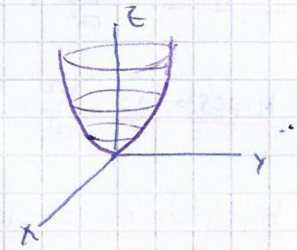


② Calcular las curvas de nivel de las sig. funciones:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$; $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2$

$x^2+y^2=c$





- $c<0$: $x^2+y^2=-2$ no tiene solución.
- $c=0$: $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$
- $c>0$: $x^2+y^2=c>0$:

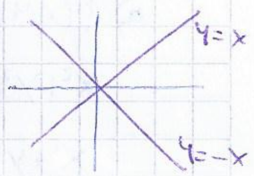
$\mathrm{graf}(f) = \{(x,y,z) / z\in f(x,y), x,y \in \mathrm{Dom} f\}$

$z=x^2+y^2 \implies \begin{cases} x=0 \implies z=y^2 \\ y=0 \implies z=x^2 \end{cases}$

b) $f(x,y) = x^2-y^2$

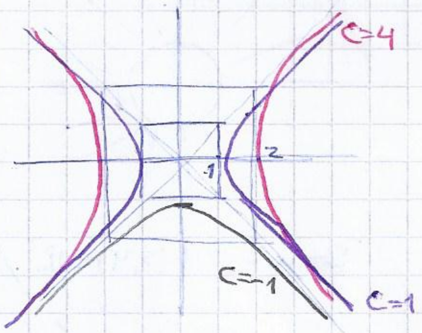
$z=x^2-y^2=c$

- $c=0$: $x^2-y^2=0 \iff x^2=y^2 \iff |x|=|y| \iff y=\pm x \to \begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$



- $c>0$: $x^2-y^2=c$
  - $x^2-y^2=1$
  - $x^2-y^2=4$

  $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

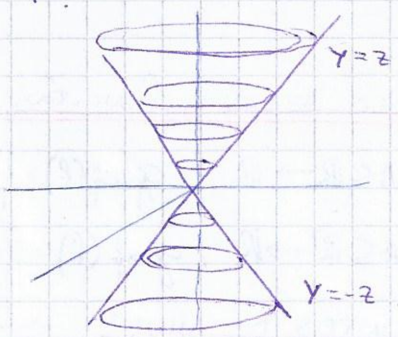


- $c<0$: $x^2-y^2=c$

  $x^2-y^2=-1$

③ a) $x^2+y^2=z^2$ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=\pm\sqrt{x^2+y^2} \to z=\sqrt{x^2+y^2}>0$. Cono.

- $z=0$ $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$.
- $z=1$ $x^2+y^2=1$
- $z=2$ $x^2+y^2=4$
- z fijo $x^2+y^2=z^2 \to$ Circunf. de radio $|z|$
- $z=-2$ $x^2+y^2=4$.



$x=0$ $y^2=z$

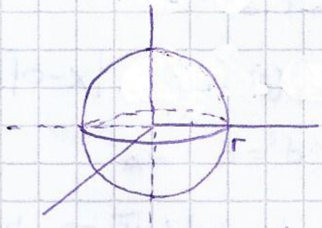
$|y|=|z|$

$y=\pm z$

b) $x^2+y^2=r^2$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=r^2\}$

c) $x^2+y^2+z^2=r$



$z=\underbrace{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}_{f(x,y)}$

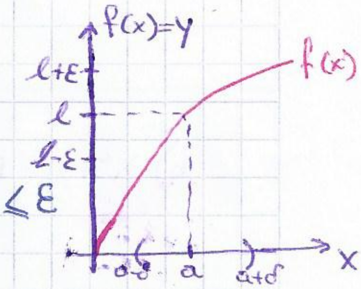
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoide

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$

LÍMITES

En $\mathbb{R}$: si $f: \mathrm{Dom} f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 \ / \ \text{si } |x-a|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon$$



① Ej: $\lim_{x\to0} x^2=0$

Veámoslo por definición:

Dado $\varepsilon>0$ busco $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ / si $|x-0|\leq\delta \Rightarrow |x^2-0|<\varepsilon$.

$|x|<\delta \rightarrow |x^2|=|x|^2<\delta^2=\varepsilon$

$\Rightarrow$ me tomo $\delta=\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow$ si $|x|\leq\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x^2|\leq\varepsilon$

② Ej: $\lim_{x\to5} x^2=25$

Por def: dado $\varepsilon>0$ busco $\delta>0$ / si $|x-5|\leq\delta \Rightarrow |x^2-25|\leq\varepsilon$.

$|x^2-25| = |(x-5)(x+5)| \leq |x-5|\cdot|x+5| \leq |x+5|\delta \leq \delta\cdot 11 = \varepsilon \rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{11}$

si $\delta=1$: $|x-5|\leq1 \Leftrightarrow -1\leq x-5\leq1 \Leftrightarrow -1+10 \leq x+5 \leq 1+10$

$\Leftrightarrow -11 \leq 9 \leq x+5 \leq 11 \Leftrightarrow |x+5|\leq 11$

$\Rightarrow$ si tomo $\delta=\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\}$, entonces si $|x-5|\leq\delta \Rightarrow |x^2-25|\leq\varepsilon$

③ Ej: $\lim_{x\to2} x^3=8$

Dado $\varepsilon>0$ busco $\delta(\varepsilon)>0$ / si $|x-2|\leq\delta \Rightarrow |x^3-8|<\varepsilon$

$|x^3-8| = |(x^2+2x+4)(x-2)| = |x^2+2x+4|\cdot\underbrace{|x-2|}_{\leq\delta}$

$|x^2+2x+4|\cdot|x-2| \leq 19\delta=\varepsilon$

Si tomo $\delta=\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\}$, listo.

Aux

$\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+2x+4$

	1	0	0	8
2	↓	2	4	8
	1	2	4	0

si $\delta=1$: $-1\leq x-2\leq1$

$\Leftrightarrow 1\leq x\leq3$

$\Leftrightarrow 1\leq x^2\leq 9 \Rightarrow x^2+2x+4 \leq 9+6+4 = 19$

④ Ej: $\lim_{x\to2} \frac{4x+1}{3x-4} = \frac{9}{2}$

Dado $\varepsilon>0$ busco δ / si $|x-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{4x+1}{3x-4} - \frac{9}{2}\right| < \varepsilon$.

$\left|\frac{4x+1}{3x-4} - \frac{9}{2}\right| = \left|\frac{2(4x+1)-9(3x-4)}{2(3x-4)}\right| = \left|\frac{-19x+38}{2(3x-4)}\right| = \left|\frac{-19(x-2)}{2(3x-4)}\right| \leq \frac{19}{2}\frac{|x-2|}{|3x-4|}$ ⊛

⊛ $\frac{19}{2}\frac{|x-2|}{|3x-4|} \leq \frac{19}{2}\frac{\delta}{1} = \varepsilon$

Si tomo $\delta=\min\left\{\frac{1}{3}, \frac{2\varepsilon}{19}\right\}$ listo.

Aux: tomo $\delta=\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} \leq x-2 \leq \frac{1}{3}$

$\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$

$5 \leq 3x \leq 7$

$1 \leq \underbrace{3x-4}_{=|3x-4|} \leq 3$

En el denominador se acota "por arriba" $(1\leq 3x-4)$ y en el numerador por abajo $(3x+4\leq3)$

NOTA

⑤ **Ej:** $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow$ "0 por acotado"

Dado $\varepsilon > 0$,

Si $|x| \leq \delta \Rightarrow \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \leq \delta = \varepsilon$.

⑥ **Ej:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow$ Tengo que saber como medir encima el infinito,

$x \to \infty \Leftrightarrow \underbrace{y = \frac{1}{x} \to 0}_{\text{si } x\to\infty}$ haciendo un cambio de variable.

$\Rightarrow$ Reescribo el límite:

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}+1} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1+y}{y}} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{1+y}.$$

Álgebra de Límites y propiedades

Si $f: \text{Dom} f \to \mathbb{R}$, $g: \text{Dom} g \to \mathbb{R}$; $a \in \text{Dom} f \cap \text{Dom} g$.

Llamo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$.

- $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = F \pm G$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = F \cdot G$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$.
- $\lim\limits_{x\to a} \left(c\, f(x)\right) = c \cdot F$, $c = \text{cte}$.

⑦ **Ej:** calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^3+4x^2-3}{\lim\limits_{x\to 1} x^2+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^3 + \lim\limits_{x\to 1} 4x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 3}{\lim\limits_{x\to 1} x^2 + \lim\limits_{x\to 1} 5} = \frac{1+4-3}{1+5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

⑧ **Ej:** $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{(x+3)}} = \lim\limits_{x\to -3} x-3 = -6.$

⑨ **Ej:** $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-4}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-4}{x-5}\left(\frac{\sqrt{x+11}+4}{\sqrt{x+11}+4}\right) = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x+11-16}{(x-5)(\sqrt{x+11}+4)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x+11}+4)} = \frac{1}{8}$

⑩ **Ej:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

⑪ **Ej:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x \ln 2} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{2^x(\ln 2)^2} = 0.$

Aux $f' = ?$

$2^x = f(x)$

$x \ln 2 = \ln f(x)$

$\ln 2 = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = f(x)\ln 2 = 2^x \ln 2$

NOTA

⑫ Ej: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \infty - \infty$.

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4-(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{\cancel{x^2}-4} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

⑬ Ej: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty)$ tengo 2 opciones.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{-(\ln x)^{-2} x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0 \end{cases}$$

→ este camino me lleva a una indeterminación tras otra HASTA LA MUERTE

⑭ Ej: $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^\infty$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = L$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}\right) = \ln L$$

$$\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x}} = \ln L$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} \ln x = \ln L$$

Entonces: $\boxed{\ln L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = -1}$

$$\Rightarrow \ln L = -1$$

$$e^{\ln L} = e^{-1}$$

$$L = e^{-1}$$

$\boxed{\text{LÍMITES}}$

En una variable:

Def: $f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$ si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

En dos variables:

Def: $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /$ si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - l\| < \varepsilon$

① $\lim_{(x,y) \to (2,1)} x+y = 3$.

Veamos por definición:

Dado $\varepsilon > 0$, busco $\delta > 0 /$ si $\|(x,y)-(2,1)\| < \delta \Rightarrow \|x+y-3\| < \varepsilon$

• PROPIEDADES ~~DE LA NORMA~~: PARA ACOTAR

• $|a| \leq \|(a,b)\|$
$|b| \leq \|(a,b)\|$

• $a,b \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b} \leq 1$

• $|\text{sen}(a)| \leq 1 \quad \forall a$

• $|\text{sen}(a)| \leq |a| \quad \forall a$

Desigualdad triangular → • $|a+b| \leq |a| + |b|$
$|a-b| \leq |a| + |b|$

Si $\|(x,y)-(2,1)\| < \delta$, $\Rightarrow |x-2| \leq \|(x,y)-(2,1)\|$; $|y-1| \leq \|(x,y)-(2,1)\|$

$|x+y-3| = |x+2-2+y-3| = |x-2+y-1| \leq |x-2| + |y-1|$

$|x-2| + |y-1| \leq \|(x,y)-(2,1)\| + \|(x,y)-(2,1)\| < \delta + \delta = 2\delta = \varepsilon \Rightarrow$ tomo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

② $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^5 y}{x^4 + y^4} = \frac{0}{0}$. Tengo que conseguir un candidato al límite lo restringo a una curva que pase por $(0,0)$ y paso el lim. a una variable

Curvas que pasen por $(0,0)$:

$\boxed{x=0}$: $\lim_{y \to 0} \frac{0^5 \cdot y}{0^4 + y^4} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$. si el límite existe tiene que valer 0.

Probemos que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^5 y}{x^4 + y^4} = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, busco $\delta > 0 /$ si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{x^5 y}{x^4 + y^4} - 0 \right\| < \varepsilon$

Obs: $|x| \leq \|(x,y)\| < \delta$
$|y| \leq \|(x,y)\| < \delta$

$$\left| \frac{x^5 y}{x^4 + y^4} \right| = \frac{|x|^5 |y|}{x^4 + y^4} = \underbrace{\frac{x^4}{x^4 + y^4}}_{\leq 1} |x||y| \leq |x| \cdot |y| < \delta \cdot \delta = \delta^2 = \varepsilon$$

Tomo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

NOTA

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\, y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\boxed{\text{Si } x=0}$: $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(0)\, y}{|y|} = 0$ Probamos por definición

Dado $\varepsilon>0$, busco . . .

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)\, y}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=\|(x,y)\|}}\right| = \frac{\overbrace{|\operatorname{sen} x|}^{\leq 1}|y|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|y|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|} = 1 < \varepsilon\ ?$$

no necesariamente. Si $\varepsilon = 0{,}1$ no vale.

Esto no significa necesariamente que el límite no sea 0.

Puede ser también que la acotación esté mal hecha.

$$\frac{\overbrace{|\operatorname{sen} x|}^{|\operatorname{sen} x| \leq |x|}\, |y|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|x|\,|y|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} = \|(x,y)\| = \delta = \varepsilon .$$

④ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|y-2|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) y^4}{x^2+y^2}$

$\boxed{x=0}$ NO ESTÁ DEFINIDA.

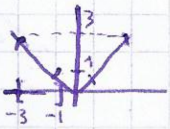
$\boxed{y=0}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot 0^4}{x^2+0^2} = 0.$

Aux: tomo $\delta = 1 \Rightarrow |y|<1$

$-1<y<1$

$-3<y-2<-1$

$1<|y-2|<3$



Dado $\varepsilon>0$, busco δ...

$$\left|\frac{|y-2|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) y^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{|y-2|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| y^4}{x^2+y^2} \leq |y-2|\cdot 1\cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} y^2 \leq 3y^2 < 3\delta^2 = \varepsilon .$$

$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

Tomo $\delta = \min\left\{1, \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}\right\}$

⑤ Probar que el siguiente límite no existe: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\, y}{x^3+y^2}$

$\boxed{x=0}$ $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$

$\boxed{y=0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0$

$\boxed{y=mx}$ $(m\in\mathbb{R})$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\cdot mx}{x^3+m^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{mx^2}{x^3+m^2x^2} = \lim \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\dfrac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x+m^2)}}_{\to \frac{m}{m^2}\ (m\neq 0)} = \dfrac{1}{m}$

los curvas no convergen en el mismo punto $\to$ el lím. no existe.

⑥ Probar que no existe: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6 y}{x^{10}+y^4}$

$\boxed{y=mx}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6\, mx}{x^{10}+m^4x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{m\cancel{x^7}^{\,3}}{\cancel{x^4}(x^6+m^4)} = 0\ \forall m$

$\boxed{y=x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6\cdot x^2}{x^{10}+x^8} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^8}}{\cancel{x^8}(x^2+1)} = 1$

NOTA

CONTINUIDAD

Def: Dada una función $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, si $p \in A$ decimos que **f es continua en $x = p$** si $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

- **f es continua en A** si es continua $\forall p \in A$.

① Probar que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{3x^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en el origen

Dado $\varepsilon > 0$, si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow$ qvq $\left| \dfrac{\cancel{x} x^2 y}{3x^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 y^2} \right| \leq \varepsilon$

$$\left| \frac{x^2 y}{3x^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{3x^2 + \underbrace{\tfrac{1}{2}(x-1)^2 y^2}_{\geq 0}} \leq \frac{\cancel{x^2} |y|}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}|y| \leq \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

Si tomo $\delta = 3\varepsilon$ listo, $\lim_{(x,y)\to} \dfrac{x^2 y}{3x^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 y^2} = 0$

$\Rightarrow f$ es continua en el origen.

Parcial $\rightarrow$ ② Dado $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(y^2)\, e^{x+y}\, y x^2 + a \operatorname{sen} y^3}{e^{x+y} y^4 + x^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Determinar $a \in \mathbb{R} / f$ sea continua en el origen

Dado $\varepsilon > 0$ si $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow$ qvq $|\text{cosa enorme}| \leq \varepsilon$

$$\left| \frac{\cos^2(y^2)\, e^{x+y}\, y x^2 + a \operatorname{sen} y^3}{e^{x+y} y^4 + x^2} \right| \leq \frac{|\cos^2(y^2) e^{x+y} y x^2| + |a| |\operatorname{sen}(y^3)|}{e^{x+y} y^4 + x^2} \leq (*)$$

$$(*) \leq \frac{1 \cdot e^{x+y} |y| x^2}{e^{x+y} y^4 + x^2} + \frac{|a| |\operatorname{sen} y^3|}{e^{x+y} y^4 + x^2} = (1) + (2)$$

Si $\delta = 1$: $\|(x,y)\| < 1 \rightarrow |x| \leq 1, |y| < 1$

$-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$

$-2 < x+y < 2 \Rightarrow e^{-2} \leq e^{x+y} \leq e^2$

$(1) \leq \dfrac{\cancel{e^{x+y}} \cancel{|y|} x^2}{\cancel{e^{x+y}} \cancel{y} y^3} = \dfrac{x^2}{|y|^3}$ no me sirve

$(1) \leq \dfrac{e^{x+y} |y| \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = e^{x+y}|y| \leq \delta e^{x+y} \leq \delta e^2 = \varepsilon \longrightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{e^2}$

$(2) \Rightarrow$ si acoto $|\operatorname{sen}(y^3)| \leq 1 \Rightarrow (2) \leq \dfrac{|a|}{e^{x+y} y^4 x^2} \longrightarrow \infty$

si acoto $|\operatorname{sen}(y^3)| \leq |y|^3 \Rightarrow (2) \leq \dfrac{|a||y|^3}{e^{x+y} y^4 + x^2} \leq \dfrac{|a| y^3}{e^{x+y} \cancel{y^4}} \longrightarrow \infty$

si $a = 0 \Rightarrow (1)+(2) \leq \varepsilon$ si $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{e^2}\right\}$

$(0,t) \rightsquigarrow \lim_{t \to 0} \dfrac{a \operatorname{sen}(t^3)}{e^t\, t^4} = \lim_{t \to 0} a \dfrac{\operatorname{sen} t^3}{t^3} \cdot \dfrac{1}{e^t t} = \infty$

si $a \neq 0$, f no es continua en el origen.

③ Analizar la continuidad de $f(x,y) = \dfrac{3(x+1)^2}{(x+1)+(y-2)^2}$ en $(-1,2)$

Si ese límite existe, acercándome por diferentes curvas debe ser igual.

- $\alpha(t)=(-1,t+2)$ si $t\to 0$ $\alpha(t)\to(-1,2)$

$$\lim_{t\to0} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to0} \frac{0}{0+t} = 0$$

- $\alpha(t)=(t-1,2)$

$$\lim_{t\to0} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to0} \frac{3t^2}{t^2+0} = 3$$

$\therefore$ f no es continua en $(-1,2)$

④ Analizar la continuidad de $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4x^2y}{x^2+y^3} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ en el origen.

Tomo curvas:

- $\alpha(t)=(t,t)$: $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{4t^3}{t^2+t^3} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{4t^3}{t^2}}{1+\frac{t^3}{t^2}} = \lim_{t\to0}\frac{4t}{1+t}=0$
- $\alpha(t)=(t,mt)$ $\displaystyle\lim_{t\to0}\cdots=0$
- $\alpha(t)=(t,\sqrt{t})\longrightarrow \displaystyle\lim_{t\to0}\cdots=0$
- $\alpha(t)=(t,t^{1/3})\longrightarrow \displaystyle\lim_{t\to0}\cdots=0$
- $\alpha(t)=\sqrt[3]{t^4-t^3},t$: $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{4(t^4-t^3)t}{t^4-t^3+t^3}=\lim_{t\to0}\frac{4t^5-4t^4}{t^4}=-4$

$\therefore$ la función no es continua en el origen.

(t,t^2)

Parcial. ⑤ Analizar la continuidad de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y|x|^\alpha+y^{10}}{e^x|x|^3+y^8} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$ en el origen, $\alpha\in\mathbb{N}$.

$\alpha(t)=(0,t)$ $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{t^{10}}{t^8}=0$.

$\alpha(t)=(t,mt)$: $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{tmt^\alpha+m^{10}t^{10}}{e^tt^3+m^8t^8}=\frac{0}{0}\overset{LH}{=}\lim_{t\to0}\frac{m(\alpha+1)t^\alpha+10m^{10}t^9}{e^tt^3+3e^tt^2+8m^8t^7}=$

$$=\lim\frac{m\alpha(\alpha+1)t^{\alpha-1}+10\cdot9\cdot m^{10}t^8}{e^tt^3+3t^2e^t+3e^tt^2+6te^t+7\cdot8m^8t^6}$$

si $\alpha=0$ NO
si $\alpha=1$ NO
$\alpha=2$, $\alpha=3$ NO

si $\delta=1$: $|x|\le1$, $|y|\le1$
$-1\le x\le1$
$e^{-1}\le e^x\le e$
$\frac{1}{e}\le\frac{1}{e^x}\le\frac{1}{e^{-1}}=e$

quiero ver que si $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\ge4\Rightarrow$ el límite es 0.

$\alpha\ge4$

Dado $\varepsilon>0$, si $\|(x,y)\|<\delta$

$$\left|\frac{y|x|^\alpha+y^{10}}{e^x|x|^3+y^8}\right|\le\frac{|y||x|^\alpha+y^{10}}{e^x|x|^3+y^8}=\frac{|y||x|^\alpha}{\underbrace{e^x|x|^3}_{\ge0}+\underbrace{y^8}_{\ge0}}+\frac{y^{10}}{e^x|x|^3+y^8}\le\frac{|y||x|^\alpha}{e^x|x|^3}+\frac{y^{10}}{y^8}\le\frac{|y||x|^{\alpha-3}}{e^x}+y^2\cdot\le e\delta^{\alpha-2}+\delta^2$$
$$\le 2\max\{e\delta^{\alpha-2},\delta^2\}=\delta^*$$

- si $\delta^*=2e\delta^{\alpha-2}=\varepsilon\Rightarrow\delta=\left(\frac{\varepsilon}{2e}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}}$
- si $\delta^*=2\delta^2=\varepsilon\Rightarrow\delta=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac12}$

Si tomo $\delta=\min\left\{1,\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2},\left(\frac{\varepsilon}{2e}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}}\right\}$ listo.

$\Rightarrow$ f es cont en $(0,0)$ si $\alpha>3$, $\alpha\in\mathbb{N}$.

① $f(x) = e^{+a^2x} + x^3 + x$, $a \in \mathbb{R}$. Probar que $f(x)=0$ tiene exactamente una solución en $[-1,0]$

- TEOREMA (Bolzano): Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua / $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c)=0$.

$f(-1) = e^{-a^2} - 2$; $f(0) = 1$

¿$f(-1)<0 \ \forall a$?

¿$e^{-a^2} - 2 < 0$?

$e^{-a^2} < 2$.

$\ln e^{-a^2} < \ln 2$.

$-a^2 < \ln 2$.

$0 < \ln 2 + a^2$

$\forall a \in \mathbb{R} \begin{cases} f(-1)<0 \\ f(0)>0 \end{cases}$.

Como f es continua, por Bolzano $\exists c \in (-1,0)$ tal que $f(c)=0$.

¡falta ver que no hay más raíces!

- Opción 1: Ver que $f \nearrow$

$f'(x) = \underbrace{e^{a^2x} \cdot a^2}_{>0} + \underbrace{3x^2}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{>0} > 0$ ✓

- TEOREMA (Rolle): $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b).

Si $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c)=0$.

Supongamos que $f(c)=0$ y $f(d)=0 \Rightarrow f(c)=f(d) \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists e \in (c,d) / f'(e)=0$

Pero $f'(x)>0 \ \forall x$ ¡Absurdo! $\Longrightarrow$ f tiene una ! raíz.

② $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|$

- TEOREMA (Lagrange): Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, deriv. en $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \cos(c)(x-0)$

$|\operatorname{sen} x| = |\cos(c)| \cdot |x| \leq |x|$

③ Probar que $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$

Lagrange: $f(x) = \ln x$.

$\ln(x+1) - \ln x = (\ln x)'_{x=c}(x+1-x)$

$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$

$x < c < x+1$

$\frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$.

$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

NOTA

③ $f'>0 \Rightarrow f$ estrictamente creciente.

qvq $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

$b-a>0 \Rightarrow f(b)-f(a)>0$

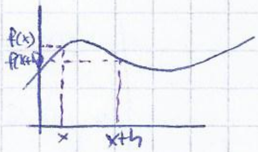
- Lagrange: $\exists c \in (a,b) /$ $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Como $f'>0 \Rightarrow f'(c)>0$. Como $a<b \Rightarrow b-a>0 \Rightarrow f'(c)(b-a)>0$.

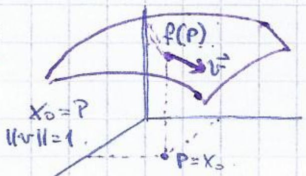
$= f(b)-f(a)>0$.

DERIVADAS

En $\mathbb{R}$: $f'(x)=\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(\cancel{x}+h)-\cancel{x}}$



En $\mathbb{R}^2$:



$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=f_v(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h}$.

$\Rightarrow$ Derivada direccional.

① $f(x,y)=\frac{x}{y}$; $(x_0,y_0)=(2,1)$; $v_1=(1,0)$; $v_2=(0,1)$.

$\frac{\partial f}{\partial v_1}(2,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f((2,1)+h(1,0))-f(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2+h}{1}-\frac{2}{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2}+h-\cancel{2}}{h}=1$.

$\frac{\partial f}{\partial v_2}(2,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{1+h}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2}-2(\cancel{1}+h)}{h(1+h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)}=-2$.

$\frac{\partial f}{\partial v_1}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_0+h}{y_0}-\frac{x_0}{y_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{y_0\cancel{h}}=\frac{1}{y_0}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{1}{y_0}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{-x_0}{y_0^2}$

$\frac{\partial f}{\partial v_2}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial v_2}=\frac{-x_0}{y_0^2}$.

NOTA

② $f(x,y) = x^{1/3} y^{1/3}$; ¿ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^{1/3}}{3x^{2/3}}$?

$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} =$

$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^{1/3} y^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y^{1/3} h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y^{1/3}}{h^{2/3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } y=0 \\ \infty & \text{si } y\neq 0 \end{cases}$

Vale donde f es derivable como función de x o de y.

③ $f(x,y) = \begin{cases} xy \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = y\left[\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]$; $x\neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}$; $x\neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} y\,\text{sen}\,\frac{1}{h}$ $\nexists$

¿f continua?

¿ $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,y)]{} 0$?

Sea $\varepsilon>0$: $\left|xy\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |xy|\left|\frac{1}{x}\right| \leq \|(x-0, y-y_0)\|$ esta acotación no sirve.

Otra:

$\left|xy\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x||y| \leq |y|\,\|(x,y-y_0)\| \underset{\delta<1}{\leq} (y_0+1)\delta < \varepsilon$.

tomo $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{y_0+1}\right\}$

④ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y) = 0,0. \end{cases}$ $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), (v_1,v_2)\rangle$
$= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right), (v_1,v_2)\right\rangle$

$v = (v_1,v_2)$; $\|v\|=1$; $(x_0,y_0) = (0,0)$.

$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0)+t(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t}$.

$= \frac{t^2 v_1^2 t v_2}{t(t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2 t^3}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \begin{cases} \frac{v_1^2}{v_2} & ; v_2\neq 0 ; \\ 0 & ; v_2 = 0. \end{cases}$

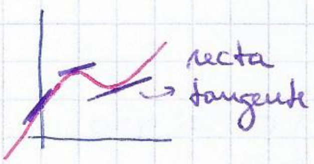
Existe $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)\ \forall (x,y); \forall v$.

Ejercicio: f no es continua.

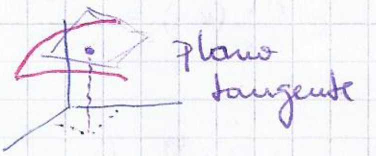
NOTA (t,t^2)

Diferenciación

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Def: $\underset{\|v\|=1}{v \in \mathbb{R}^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h}$

$v=(1,0) \quad \dfrac{\partial f}{\partial v} \underset{\text{Not}}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$v=(0,1) \quad \dfrac{\partial f}{\partial v} \underset{\text{Not}}{=} \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Def: $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in A$; Decimos que f es diferenciable en (x_0,y_0) si:

- Existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$.

Obs: Si f es diferenciable en $(x_0,y_0) \Longrightarrow$ existe plano tangente al gráfico de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ y tiene ecuación:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

f es C^1 en (x_0,y_0) (existen derivadas parciales y son continuas)

$\Downarrow \not\Uparrow$

f es diferenciable en (x_0,y_0) $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$ $\forall v / \|v\|=1$

$\Downarrow \not\Uparrow$

f es continua en (x_0,y_0)

Propiedad:

$$f \text{ diferenciable en } (x_0,y_0) \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), v \rangle$$

① Analizar dif. en $(0,0)$: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Obs: $(x_0,y_0) \neq (0,0)$: ¿f dif. en (x_0,y_0)? **Sí**.

Por ser $+$, $\div$ y comp. de funciones dif.

$\Longrightarrow$

Siguiendo con el ejercicio:

En (0,0) por def:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underbrace{h,0}_{=(0,0)+h(1,0)}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^3}{|h|} + 2h - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{3}\,2}}{|h|\cdot\cancel{h}} + \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$

$=|h|$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-h^4}{|h|} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{-h^3}{|h|}}_{=-h|h|} = 0$$

$z = 0 + 2x + 0y$.

$z = 2x$.

$$\cdot\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3-y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cancel{2x} - \cancel{2x}}{\|(x,y)\|} = 0\ ?$$

$$\cdot\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{\|(x,y)\|^2} = 0\ ?$$ lo probamos por definición:

$\varepsilon > 0$, si $\|(x,y)\| < \delta$

$$\left|\frac{x^3-y^4}{\|(x,y)\|^2}\right| = \frac{|x^3-y^4|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{|x|^3+|y|^4}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\|(x,y)\|^3 + \|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\| + \|(x,y)\|^2 < \delta + \delta^2 < \circledast$$

$\delta < 1$
$\delta^2 < \delta$

$\circledast < 2\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

$\cdot\ v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \underset{\text{Prop}}{=} \left\langle (2,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

② Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\,\text{sen}(x)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ¿f es C^1?

¿f es C^1? $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

derivando con reglas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \boxed{} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\ \forall v / \|v\| = 1$.

b) analizar dif. en (0,0)

$\Longrightarrow$

NOTA

a) Sea $v=(a,b) / a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a,b))-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^3} a^2 b \, \overbrace{\operatorname{sen}(ah) \cdot \frac{1}{ah}}^{\to 1}}{\cancel{h^3} \underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}} = a^2 b.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = a^2 b.$$

b) $\underset{v=(1,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$; $\underset{v=(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$ $\boxed{z=0}$.

$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy\operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}-0}{\|(x,y)\|} = 0 \ ?$$

$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\operatorname{sen}(x)}{\|(x,y)\|^3} = 0 \ ?$$ Probemos por curvas.

$x=0$, $y=0$,

$y=x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{(\sqrt{2}|x|)^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}^3 x^2 \cdot x} = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \neq 0$$

Si f es dif. en $(0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla(0,0) ; v \rangle \ \forall v$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \ \forall v$ ¡Abs!

$\downarrow$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$.

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

$\therefore$ f no es diferenciable en $(0,0)$.

③ Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x^2+y^2)^{3/2}}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Analizar diferenciabilidad y continuidad en $(0,0)$

• Dif. en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{|h|^3}-1}{h^2}$$

Aux: $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^3}-1}{h^3} \overset{LH}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^3}\cdot \cancel{3h^2}}{\cancel{3h^2}} = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-h^3}-1}{h^3} \overset{LH}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-h^3}\cdot(-\cancel{3h^2})}{\cancel{3h^2}} = -1 \end{array}\right\} \neq$$

∴ f no es dif. en $(0,0)$ porque $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

• Cont. en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x^2+y^2)^{3/2}}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\left(e^{(x^2+y^2)^{3/2}}-1\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}}_{\to 1} \underbrace{(x^2+y^2)^{1/2}}_{\to 0} = 0$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{e^{g(x,y)}-1}{g(x,y)} = 1$

si $g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$

∴ f es cont. en $(0,0)$.

DIFERENCIABILIDAD DE CAMPOS VECTORIALES

Vimos que si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $p \in \text{Dom} f$, $P = (P_1, P_2) \Rightarrow$ f es diferenciable en P si el plano tangente de f en P aproxima a f "bien", en el sentido de que

$$\lim_{X \to P} \frac{|f(x) - f(P) - f_x(P)(X-P_1) - f_y(P)(X-P_2)|}{\|X-P\|} = 0.$$

Def: Llamamos $T_P(X-P) = f_x(P)(X-P_1) - f_y(P)(X-P_2) = \langle \nabla f(P), (X-P) \rangle \Rightarrow$ el plano tangente de f en P es: $f(P) + T_P(X-P)$.

Entonces f es diferenciable en P si $\lim\limits_{X \to P} \dfrac{|f(x) - f(P) - T_P(X-P)|}{\|X-P\|} = 0$.

$T_P(X-P)$ es la diferencial de f en p evaluada en $X-P$.

¿Qué ocurre con la diferenciabilidad de $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $p \in \text{Dom} F \subset \mathbb{R}^n$ si existe una T.L: $T_P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que: $\lim\limits_{X \to P} \dfrac{\|f(x) - f(P) - T_P(X-P)\|}{\|X-P\|} = 0$.

Def: a $T_P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se la llama diferencial de f en p

Se nota a esa TL con DF_P $\qquad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Se tiene que $\underbrace{DF_P(x)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{[DF_P]}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^{n \times 1}}$ $\qquad F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(\dots), \dots, F_m(\dots))$.

$$\text{Con } [DF_P] = \begin{pmatrix} \nabla F_1(P) \\ \vdots \\ \nabla F_m(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(P)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial F_1(P)}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial F_m(P)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_m(P)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

① $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x^2 y, e^{xy}, x)$. Calcular $DF_P(1,1)$, $P = (1,2)$

RTA: Observar que F es diferenciable en todo punto (por el álgebra de func. dif.).

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow [DF_P] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

$$[DF_P] = \begin{pmatrix} \nabla F_1(P) \\ \nabla F_2(P) \\ \nabla F_3(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{P=(1,2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2e^2 & e^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DF_P(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2e^2 & e^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3e^2 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA

② Dada $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (2x-y, 3x+5y)$. Calcular DF_p, $p \in \mathbb{R}^2$.

Rta: $[DF_p] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $[DF_p] = \begin{pmatrix} \nabla F_1(p) \\ \nabla F_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow DF_p(x,y) = [DF_p]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x-y, 3x+5y) = F(x,y)$.

REGLA DE LA CADENA

Def: Si $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

①. Calcular $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ — llamo $f(x) = tg(x)$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$.

RTA: $x = tg(\operatorname{arctg}) x$

$x = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow 1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'$.

$\Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \operatorname{arctg} x}}$.

$\Rightarrow (\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg}(x))$

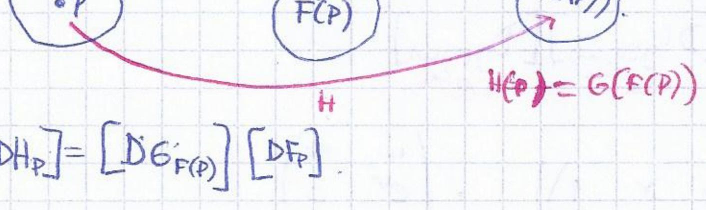
$x = tg(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)}{\cos(\operatorname{arctg} x)} \Rightarrow \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg} x)}^{=1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg} x)}}{x^2}$.

$\Rightarrow 1 = \underbrace{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arctg} x)}_{=1-\cos^2(\operatorname{arctg} x)}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \cos^2(\operatorname{arctg} x)$

$\Rightarrow \cos^2(\operatorname{arctg} x) = 1 - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$ ✓

TEOREMA: Si $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es dif. en $p \in A$, y $G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es dif en $F(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow H = G \circ F$ es diferenciable en P y vale que:



$[DH_p] = [DG_{F(p)}][DF_p]$.

→ tipo ej. 32:

③ $f(x,y,z) = x + yz$; con $\begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = e^t \\ z(t) = t^2+1 \end{array}$. Calcular la derivada de ~~f~~

RTA:

FORMA 1: (sustituyo).

$$f(x(t), y(t), z(t)) = \cos t + e^t (t^2+1)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(\dots) = -\operatorname{sen} t + e^t (t^2 + 1 + 2t)$$

FORMA 2 (Cadena).

$$f(x(t), y(t), z(t)) = f(g(t))$$

Con $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $f(x,y,z) = x + yz$

$f(g(t)): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$$t \in \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \ (x(t), y(t), z(t)) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \ f(x,y,z)$$

$$\frac{df}{dt}(t) = [Df\circ g_T] = \underset{\in \mathbb{R}^{1\times 3}}{[Df_{g(T)}]} \ \underset{\in \mathbb{R}^{3\times 1}}{[Dg_T]}$$

$$[DH_P] = [DG_{F(P)}][DF_P].$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & z & y \end{pmatrix}\Big|_{g(T)} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}\Big|_T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & T^2+1 & e^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} T \\ e^T \\ 2T \end{pmatrix} = -\operatorname{sen} T + (T^2+1+2T)e^T$$

④ $f(x,y,z) = e^x + xy + z$; $\begin{cases} x(v,w) = vw \\ y(v,w) = e^v \\ z(v,w) = v^2 \end{cases}$. calcular $\frac{df}{dv}$, $\frac{df}{dw}$.

RTA: * $f(x(v,w), y(v,w), z(v,w)) = e^{vw} + vwe^v + v^2$.

$$\frac{df}{dv}(\dots) = w e^{vw} + w e^v (1+v) + 2v .$$

$$\frac{df}{dw}(\dots) = v e^{vw} + v e^v$$

* $f(x(v,w), y(v,w), z(v,w)) = f(g(v,w)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(v,w) \to (vw, e^v, v^2)$

$$\mathbb{R}^2 \ (v,w)\in\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \ (vw, e^v, v^2) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \ e^{vw} + vwe^v + v^2$$

$$\underset{\in \mathbb{R}^{1\times 2}}{[D(f\circ g)_{(v,w)}]} = \underset{\in \mathbb{R}^{1\times 3}}{[Df_{g(v,w)}]} \ \underset{\in \mathbb{R}^{3\times 2}}{[Dg_{(v,w)}]}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{df\circ g}{dv} \\ \frac{df\circ g}{dw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x + y & x & 1 \end{pmatrix}\Big|_{g(v,w)} \cdot \begin{pmatrix} w & v \\ e^v & 0 \\ 2v & 0 \end{pmatrix}$$

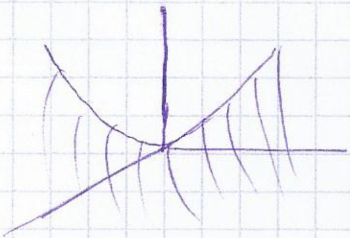
$$= \begin{pmatrix} e^{vw} + e^v & vw & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & v \\ e^v & 0 \\ 2v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{vw} + e^v)w + e^v vw + 2v \\ v(e^{vw} + e^v) \end{pmatrix}$$

Obs: Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$

Si $\nabla f(x) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(x)$ da la dirección a lo largo de la cual f crece más rápido.

⑤ $f(x,y) = -x^2+y^2$. En qué dirección tengo que ir desde el $(0,1)$ para garantizar el mayor crecimiento?

Rta: $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y) \Rightarrow \nabla f(0,1) = (0,2)$



Ejercicio: $V(r) = \frac{GmM}{r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ POTENCIAL GRAVITATORIO.

$G(r) = \nabla V(r) = -\frac{GmM}{r^2} \frac{r}{\|r\|}$

campo gravitatorio.

REGLA DE LA CADENA

Def: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $F = g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$\underbrace{[DF_x]}_{\in \mathbb{R}^{k\times n}} = \underbrace{[Dg_{F(x_0)}]}_{\in \mathbb{R}^{k\times m}} \cdot \underbrace{[Df_{x_0}]}_{\in^{m\times n}}$$

① Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = g\left(e^{x^2} + \cos y,\ x^4 y + \operatorname{sen}(xy)\right)$ con $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2

tq $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 2$; $\partial g(0,0) = 1$. Hallar $\underbrace{[DF_{(0,\pi)}]}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

RTA: $F = g \circ f \rightsquigarrow [DF_{(0,\pi)}] = [Dg_{f(0,\pi)}][Df_{(0,\pi)}]$

$f(0,\pi) = (1-1, 0) = 0,0$

$\underbrace{[Dg_{(0,0)}]}_{\in \mathbb{R}^{1\times 2}} \underset{\uparrow \text{DATO}}{=} (2\ \ 1)$

$f(x,y) = (e^{x^2} + \cos(y),\ x^4 y \operatorname{sen}(xy))$

$$[Df_{(0,\pi)}] = \begin{pmatrix} -\nabla f_1(0,\pi)- \\ -\nabla f_2(0,\pi)- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2} & -\operatorname{sen} y \\ 4x^3 y + y\cos(xy) & x^4 + x\cos(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = g\circ f \rightsquigarrow [DF_{(0,\pi)}] = [Dg_{f(0,\pi)}]\cdot[Df_{(0,\pi)}] = (2\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = (\pi\ \ 0)$$

② Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dif. y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $g(x,y) = f\big(\underbrace{e^{\operatorname{sen}(4\pi x^2 y)}, xy}_{\to h(x,y)}\big)$

Si la ecuación del plano tangente al gráfico de g en $\left(\frac{1}{2}, 1, g(\frac{1}{2},1)\right)$ es $6x + 4y - z = 1$, hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\left(\frac{1}{2}, 1, f(\frac{1}{2},1)\right)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

RTA: $6x + 4y - z = 1 \rightsquigarrow g(\frac{1}{2},1), \frac{\partial g}{\partial x}(\frac{1}{2},1), \frac{\partial g}{\partial y}(\frac{1}{2},1)$

$\boxed{z = 6x + 4y - 1}$

$$z = g(\tfrac{1}{2},1) + \frac{\partial g}{\partial x}(\tfrac{1}{2},1)(x - \tfrac{1}{2}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\tfrac{1}{2},1)(y-1)$$

$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{1}{2},1) = 6}$, $\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{1}{2},1) = 4}$, $\boxed{g(\frac{1}{2},1) = 6\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 1 - 1 = 6}$

$f(1,\frac{1}{2}) = 6$

$6 = g(\frac{1}{2},1) = f(e^{\operatorname{sen}\pi}, \frac{1}{2}) = f(1,\frac{1}{2})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\frac{1}{2}) = a$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,\frac{1}{2}) = b$

Caso $=$ $[Dg_{(\frac{1}{2},1)}] = [Df_{(1,\frac{1}{2})}]\cdot[Dh_{(\frac{1}{2},1)}]$

$(6\ \ 4) = (a\ \ b)\ (\ \circledast\ )$

$\circledast$ Calculo.

$$[Dh_{(\frac{1}{2},1)}] = \begin{pmatrix} e^{sen(4\pi x^2y)}\cos(4\pi x^2y)\,8\pi xy, & e^{sen(4\pi x^2y)}\cos(4\pi x^2y)\,4\pi x^2 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\pi & -\pi \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Volviendo a

caso = $(6 \quad 4) = (a \quad b) \cdot \begin{pmatrix} -4\pi & -\pi \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\underbrace{-4a\pi + b}_{=6}, \quad \underbrace{-\pi a + \frac{1}{2} b}_{=4})$

$$\begin{cases} -4\pi a + b = 6 \\ -\pi a + \frac{1}{2} b = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} 4\pi a - 2b &= -16 \\ -4\pi a + b &= 6 \\ \hline -4\pi a &= -4 \end{aligned}$$

$b - 2b = -10$

$-b = -10$

$\boxed{b = 10.}$ $\qquad \boxed{a = \frac{1}{\pi}}$

Para el ej. 25:

- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) > 0 \Longrightarrow$ f crece en la dirección v
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) < 0 \Longrightarrow$ f decrece en la dirección v.

③ $f(x,y) = y^2 - 2x^2y + x^4$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = -4xy + 4x^3 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = -4y + 12x^2$

$\searrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = -4x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = 2y - 2x^2 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 2$

$\searrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = -4x$

Si f es $C^2 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$.

-PRÁCTICA 3- 20/2

POLINOMIO DE TAYLOR

- **En 1 dimensión:**

$f: C^{n+1}(I) \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, dado $P \in I$, definimos:

$$P_n(x) = f(P) + f'(P)(x-P) + \frac{f''(P)}{2!}(x-P)^2 + \frac{f'''(P)}{3!}(x-P)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(P)}{n!}(x-P)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(P)}{i!}(x-P)^i \to \text{Polinomio de Taylor de } f \text{ centrado en } P.$$

$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \to$ Resto.

Obs:
- $\lim_{x \to P} \frac{R_n(x-P)}{(x-P)^n} = 0$.
- $0! = 1$
- $f^{(0)}(x) = f(x)$.
- $f(P) = P_n(P)$
- $f'(P) = P_n'(P)$
- $f^{(i)}(P) = P_n^{(i)}(P)$ con $i = 0, 1, \dots, n$.
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ donde $\xi \in (x, P)$

① $f(x) = \ln(1+x)$. Encontrar el pol de taylor de f centrado en 0. Mc LAURIN.

RTA:
- $f(x) = \ln(1+x)$ — $f(0) = 0$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ — $f'(0) = 1$
- $f''(x) = -(1+x)^{-2}$ — $f''(0) = -1$
- $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$ — $f'''(0) = 2$
- $f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}$ — $f^{(4)}(0) = -6$
- $f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5}$ — $f^{(5)}(0) = 24$
- $\vdots$
- $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ — $f^{(n)}(0) =$

$$P_5(x) = 0 + 1(x-0) - 1\frac{(x-0)^2}{2} + \frac{2x^3}{6} - \frac{6x^4}{24} + \frac{24x^5}{120}.$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1}(i-1)! \cdot \frac{x^i}{i!}$$

NOTA

• **En dimensión 2:**

• $f \in C^{n+1}(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $P \in \Omega$, $P=(a,b)$.

• $P_0(x,y) = f(P)$

• $P_1(x,y) = f(P) + f_x(P)(x-a) + f_y(P)(y-b)$

• $P_2(x,y) = P_1(x) + \frac{f_{xx}(P)}{2}(x-a)^2 + \frac{f_{yy}(P)}{2}(y-b)^2 + f_{xy}(P)(x-a)(y-b)$.

• $P_3(x,y) = P_2(x) + \frac{1}{6}\left[f_{xxx}(P)(x-a)^3 + f_{yyy}(P)(y-b)^3 + 3f_{xxy}(P)(x-a)^2(y-b) + 3f_{xyy}(P)(x-a)(y-b)^2\right]$

• $P_2(\overbrace{x,y}^{\overline{x}}) = f(P) + \langle \nabla f(P), \overline{x}-P \rangle + \langle H_f(P)(\overline{x}-P), \overline{x}-P \rangle$, con $H_f(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{yx}(P) \\ f_{xy}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix}$

② Probar que si $|x| < \frac{1}{10}$, $|y| < \frac{1}{10} \Rightarrow |e^x \operatorname{sen}(x+y) - (x+y)| < 0{,}05$

RTA: Calculo $P_1(x,y)$ centrado en $(0,0)$ para $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(x+y)$

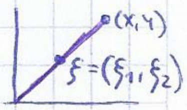
$P_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$

$= 0 + 1\cdot x + 1\cdot y$

Aux: $f_x = e^x(\operatorname{sen}(x+y) + \cos(x+y))$
$f_y = e^x \cos(x+y)$

entonces: $|\overbrace{e^x \operatorname{sen}(x+y)}^{f(x,y)} - \overbrace{(x+y)}^{P_1(x)}| = |f(x) - P_1(x)| = |R_1(x)| < 0{,}05$?

$|R_1(x)| = |P_2(\xi) - P_1(\xi)|$ con ξ en el segmento que une $(0,0)$ y (x,y)



$= \left|\frac{1}{2} f_{xx}(\xi)\xi_1^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(\xi)\xi_2^2 + f_{xy}(\xi)\xi_1\xi_2\right|$

$= \frac{1}{2} e^{\xi_1}\cdot 4\cdot \xi_1^2 + \frac{1}{2} e^{\xi_1}\cdot \xi_2^2 + e^{\xi_1}\cdot 2\cdot \xi_1\xi_2$

$\hookrightarrow |\xi_1| < \frac{1}{10}$; $|\xi_2| < \frac{1}{10}$.

Aux: $f_{xx} = e^x(\operatorname{sen}(x+y) + \cos(x+y) + \cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y))$
$f_{yy} = -e^x \operatorname{sen}(x,y)$.
$f_{xy} = e^x(\cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y))$

$= 2e^{\frac{1}{10}} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{10}}\frac{1}{10^2} + 2e^{\frac{1}{10}}\cdot\frac{1}{10^2} = 0{,}038 < 0{,}05$.

③ $f(x) = x \operatorname{sen} x + x^2$, el pol de Taylor de $g\circ f$ en $\frac{\pi}{2}$ es $P(x) = 1 + 2x - x^2 + 2x^3$.

Calcular $g'\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)$; $g''\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\begin{tikzcd} \underset{\frac{\pi}{2}}{\mathbb{R}} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \underset{(1+\frac{\pi}{2})\frac{\pi}{2}}{\mathbb{R}} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

RTA: Hago $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

$(g\circ f)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$2 - \pi + \frac{3}{2}\pi^2 = g'\left(\frac{\pi}{2}+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot(1+\pi)$

$\hookrightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2-\pi+\frac{3}{2}\pi^2}{1+\pi}$.

Aux: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x) = \operatorname{sen}x + x\cos x + 2x$
$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \pi$
$(g\circ f)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = P'\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$= 2 - \frac{2\pi}{2} + 6\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

- $g''\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right) = ?$

Yo se que $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$.

$\Rightarrow (g\circ f)''(x) = (g'(f(x)))'\cdot f'(x) + g'(f(x))\cdot f''(x)$.

$= g''(f(x))\cdot (f'(x))^2 + g'(f(x))\cdot f''(x)$.

$\underbrace{(g\circ f)''\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=2+6\pi} = \underbrace{g''\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)}\,(1+\pi)^2 + \frac{2-\pi+\frac{3}{2}\pi^2}{1+\pi}\cdot\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$

$\hookrightarrow g''\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

④ $f(x,y) = (e^x+y;\ xy+y)$; $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ / el pol de Taylor de gr 2 de $g\circ f$ en $(0,1)$ es $4+3x+2y-x^2-xy$. Calcular $\nabla g(2,1)$.

$\underset{(0,1)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{f} \underset{(2,1)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g\circ f$ } o sea, $f(0,1) = (2,1)$.

RTA: $\underbrace{[D(g\circ f)_{(0,1)}]}_{1\times 2} = \underbrace{[Dg_{(0,1)}]}_{1\times 2}\cdot\underbrace{[Df_{(0,1)}]}_{2\times 2}$

$\Rightarrow \left(\underbrace{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(0,1)}_{(g\circ f)_x(0,1)=3-1=2} \quad \underbrace{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(0,1)}_{(g\circ f)_y(0,1)=2}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(f(0,1)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(f(0,1))\right)\cdot\begin{pmatrix} e^x & 1 \\ y & x+1\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)}$

$(2 \quad 2) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(2,1) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(2,1)\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \left(\underset{A}{g_u(2,1)} + \underset{B}{g_v(2,1)} \quad \underset{A}{g_u(2,1)} + \underset{B}{g_v(2,1)}\right)$

$\hookrightarrow = \nabla g(2,1)$.

$\Rightarrow$ Despejo $\nabla g(2,1)$. En este caso voy a tener infinitas soluciones, pues $\begin{cases} A+B=2 \\ A+B=2\end{cases}$

REPASO

1° parcial - 1er cuatrimestre 2014

① Hallar, si existen, sup, inf, max, min de $A = \left\{ \underbrace{\frac{(-1)^n n+7}{n+4}}_{a_n} ;\ n \in \mathbb{N} \right\}$

RTA: • $n = 2k$ (n par) $\Rightarrow A_{2k} = \{a_{2k} / k \in \mathbb{N}\}$

$a_{2k} = \frac{2k+7}{2k+4}$ Veamos si es creciente o decreciente

a_{2k} creciente $\Leftrightarrow a_{2k} \leq a_{2(k+1)}$

$$\frac{2k+7}{2k+4} \leq \frac{2k+9}{2k+6}.$$

$$\overset{2k+4>0}{\underset{2k+6>0}{\Longleftrightarrow}} (2k+7)(2k+6) \leq (2k+9)(2k+4)$$

$$\cancel{4k^2}+12k+14k+42 \leq \cancel{4k^2}+8k+18k+36.$$

$$2\cancel{6k}+42 \leq 2\cancel{6k}+36. \quad \text{Abs!} \Rightarrow (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ decreciente.}$$

$\Rightarrow a_{2\cdot 1} = \sup A_{2k} = \max A_{2k} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\lim_{k \to \infty} a_{2k} = 1 = \inf A_{2k}$

Recordar: Una sucesión creciente y acotada tiende a su supremo, y una decreciente y acotada tiende al ínfimo.

Veamos que $a_{2k} > 1$

$\frac{2k+7}{2k+4} > 1 \Leftrightarrow 2k+7 > 2k+4$ ✓

Como $a_{2k} > 1 \Rightarrow a_{2k}$ acotada y $\inf A_{2k} \notin A_{2k} \Rightarrow A_{2k}$ no tiene mínimo.

• $n = 2k-1$ (n impar) $\Rightarrow A_{2k-1} = \{a_{2k-1} / k \in \mathbb{N}\}$

$a_{2k-1} = \frac{-2k+8}{2k+3}$ $\quad a_{2k-1} \searrow -1 = \inf A_{2k-1}$

$\sup A_{2k-1} = a_1 = \frac{-2+8}{2+3} = \frac{6}{5} = \max A_{2k-1}$

Resumiendo:

$A = A_{2k} \cup A_{2k-1}$

$\sup A = \max \{\sup A_{2k-1}, \sup A_{2k}\} = \frac{3}{2} = \max$

$\inf A = \min \{\inf A_{2k-1}, \inf A_{2k}\} = -1$

Veamos si $-1 \in A_{2k-1}$:

$\frac{-2k+8}{2k+3} = -1 \Leftrightarrow -2k+8 = -2k-3$. Abs!

$\left.\begin{array}{l} -1 \notin A_{2k} \\ -1 \notin A_{2k-1} \end{array}\right\} \longrightarrow -1 \notin A \longrightarrow$ A no tiene min.

② a) Probar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

RTA: $f(x) = \operatorname{sen} x$ continua y derivable en $\mathbb{R} \xRightarrow{\text{Lagrange}}$ ~~Teo~~

$\Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = |\cos(c)|\,|(x-y)| \leq |(x-y)|$

b) Probar que $\underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^{4/3}y}{x^2+(y-1)^2}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^{4/3}}{x^2+(y-1)^2}\right)}_{⊛} = 0$.

RTA: $0 < |⊛| \overset{\text{por a)}}{\leq} \left|\dfrac{x^{4/3}y}{x^2+(y-1)^2} - \dfrac{x^{4/3}}{x^2+(y-1)^2}\right| = \dfrac{|x|^{4/3}\,|y-1|}{\|(x,y-1)\|^2} \leq \dfrac{\|(x,y-1)\|^{4/3}\cdot\|(x,y-1)\|}{\|(x,y-1)\|^2} = \|(x,y-1)\|^{1/3} \xrightarrow[(x,y)\to(0,1)]{} 0$

$0 \leq |⊛| \leq g(x,y) \to 0 \underset{\text{"sandwich"}}{\Longrightarrow} ⊛ \to 0$.

dado $\varepsilon > 0$, si tomo $\delta = \varepsilon^3$ tenemos que, si $\|(x,y-1)\| < \delta$

$\Rightarrow |\ \ | \leq \dots \leq \|(x,y-1)\|^{1/3} \leq \delta^{1/3} = (\varepsilon^3)^{1/3} = \varepsilon$

③ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y+1)x^n y^5}{|2x+y|+3x^2y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ a) hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ / f es continua en $(0,0)$ b) ~~idem~~ diferenciable.

RTA: a) Quiero ver para qué $n \in \mathbb{N}$ $f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} f(0,0) = 0$

$|2x+y| + 3x^2y^4 \geq 3x^2y^4 \geq x^2y^4$

$|f| \leq \dfrac{|y+1|\,|x|^n\,|y|^5}{x^2y^4} \leq 2\,\|(x,y)\|^{n-1}$

si $\delta < 1 \Rightarrow |y| < 1$
$-1 < y < 1$
$-2 < 0 < y+1 < 2$
$-2 < y+1 < 2$
$|y+1| < 2$

si $n-1 > 0 \Rightarrow |f(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
$n > 1$

si $\boxed{n \geq 2} \Rightarrow f$ es continua.

Si $n=1$: $f(x,y) = \dfrac{(y+1)\,x\,y^5}{|2x+y|+3x^2y^4}$. Uso curvas:

$f(x,mx) = \dfrac{(mx+1)\,x\,m^5x^5}{|2x+mx|+3x^2m^4x^4} = \dots$

$f(x,-2x) = \dfrac{(-2)^5(-2x+1)x^6}{3\cdot(-2)^4x^6} = \dfrac{-2}{3}(-2x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{-2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ si $n=1 \Rightarrow f$ no es continua

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$. ; $f(0,0) = 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$.

$z = f(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = 0$

¿Para qué $n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-0}{\|(x,y)\|} = 0$.

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq \cdots \leq \frac{2|x|^{n-2}|y|}{\|(x,y)\|} \leq 2\|(x,y)\|^{n-2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow \text{Si } n>2$$

$n \geq 3 \Rightarrow$ f es diferenciable.

• Si $n=1 \to f$ no es continua en $(0,0) \Rightarrow$ no es diferenciable.

• Si $n=2 \to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+1)x^2y^5}{(|2x+y|+3x^2y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$? NO!

$y=-2x$: $\frac{(-2x+1)\,x^7(-2)^5}{(-2)^4 3x^6\sqrt{5x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt{5}}$; $\longrightarrow \frac{(-2x+1)\,x}{|x|}$ -2 2.

④ Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable. $(-1,f(-1))$ recta tangente: $y=3$

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $(2,f(2))$ recta tangente: $y=x-2$

g diferenciable, $g(1+e^3,-2)=1$; $\nabla g(1+e^3,-2)=(1,-2)$.

$H(x,y)=g(x^2+e^{f(x)}, xye^{f(y)})$.

¿Existe plano tangente de H en $(-1,2,H(-1,2))$? ¿Cuál es?

Ejemplo. $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $L(x,y)=(\underbrace{x^2+e^{f(x)}}_{dif}, \underbrace{xye^{f(y)}}_{dif})$

. L es dif, G también, y $H=g\circ L \Rightarrow H$ también.

$\Rightarrow \exists$ el plano tg de H en $(-1,2,H(-1,2))$:

a) $H(-1,2)+\underbrace{\frac{\partial H}{\partial x}(-1,2)(x+1)+\frac{\partial H}{\partial y}(-1,2)}_{b)}(y-2)$

a) $H(-1,2)=g(L(-1,2))=g(\underbrace{(-1)^2+e^{f(-1)},-2e^{f(2)}}_{=L(-1,2)})=g(1+e^3,-2)=1$

La recta tg de f en $(-1,f(-1))$ es $y=3$. $\qquad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\qquad f'(-1)(x+1)+f(-1)$.

$\Rightarrow f(-1)=3$; $f'(-1)=0$.

La recta tg de f en $(2,f(2))$ es $y=x-2$. $\qquad y=f'(y_0)(y-y_0)+f(y_0)$.

$\qquad f'(2)(y-2)+f(2)$.

$\Rightarrow f(2)=0$; $f'(2)=1$.

b) ¿$\nabla H(-1,2)$? Puedo usar R.C pues H es dif: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{L} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} \mathbb{R}$, H

$\overset{1\times2}{DG\circ L(-1,2)} \underset{RC}{=} \overset{1\times2}{DG_{L(1,2)}} \cdot \overset{2\times2}{DL_{(1,2)}}$.

$Dg_{L(-1,2)}=\nabla g(1+e^3,-2)=(1,2)$

$$DL(x,y)=\begin{pmatrix} 2x+e^{f(x)}f'(x) & 0 \\ ye^{f(y)} & xe^{f(y)}(1+yf'(y)) \end{pmatrix}$$

$(1,2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (-2+4 \quad 0-6) = (2,-6) \to \frac{\partial H}{\partial x}(-1,2)$; $\frac{\partial H}{\partial x}(-1,2)$

$\boxed{z=1+2(x+1)-6(y-2)}$

NOTA

PRÁCTICA 5

Def: $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in U$ es Punto crítico si f es dif. en p y $\nabla f(P) = 0$ o f no es dif. en P.

obs: los puntos críticos son candidatos a máximos y mínimos.

Def:
- $P \in U$ es máximo relativo si $\exists\ \tilde{U}$ entorno de P / $f(x) \leq f(P)\ \forall x \in \tilde{U}$
- $P \in U$ es máximo absoluto si $f(x) \leq f(P)\ \forall x \in \mathrm{Dom} f$.

① $f(x,y) = x^2 + y^2$

$P = (0,0)$, $f(0,0) = 0$

$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ $\therefore$ $P = (0,0)$ min. abs.

P.C: f dif en $\mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \iff x = y = 0$.

$P = (0,0)$ es el ! P.C.

Def: $p \in U$ es punto silla si es punto crítico y no es máximo ni mínimo.

② $f(x,y) = \ln(\overbrace{\|(x,y)\|^2}^{x^2+y^2} + 1)$. Hallar max, min, y pto silla.

Rta: $f_x(x,y) = \dfrac{1}{\|(x,y)\|^2+1} \cdot 2x = 0 \iff x = 0$

$f_y(x,y) = \dfrac{1}{\|(x,y)\|^2+1} \cdot 2y = 0 \iff y = 0$

$\Big\}$ P.C $= (0,0)$. $\big\}$ f dif en $\mathbb{R}^2$

- Criterio del Hessiano.
- $f(0,0) = \ln(1) = 0$

$f(0,0) = 0 \leq \ln(\|(x,y)\|^2 + 1) \iff 1 \leq \|(x,y)\|^2 + 1 \iff 0 \leq \|(x,y)\|^2$.

$\therefore$ $P = (0,0)$ es mínimo absoluto.

③ $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 + 2(x - xy - y)$

P.C, f dif en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f_x = 2x + 2(1-y) = 0 \iff x + 1 - y = 0 \iff y = x+1. \\ f_y = 2y + 2(-1-x) = 0 \iff y - x - 1 = 0 \iff y = x+1 \end{cases}$$

P.C (x_0, x_0+1), $x_0 \in \mathbb{R}$.

$f(x_0, x_0+1) = \cancel{x_0^2} + \cancel{x_0^2} + 2\cancel{x_0} + 1 + 1 + 2(\cancel{x_0} - \cancel{x_0^2} - \cancel{x_0} - \cancel{x_0} - 1) = 0$.

$x^2 + y^2 + 1 + 2(x - xy - y) = x^2 + y^2 + 1 + 2x - 2xy - 2y = (x-y)^2 + 1 + \overbrace{2x - 2y}^{2(x-y)} = ((x-y)+1)^2 \geq 0 = f(x_0, x_0+1)$

$\therefore$ (x_0, x_0+1) es mínimo absoluto. $(\forall x)$

④ $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad$ Pc: $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$ $\quad \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}$

$(z = x^2 - y^2)$

$(0,0)$ es punto silla, pues $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |Hf| = -4 < 0$ pero $f_{xx} > 0$

$x=0$: $f(0,y) = -y^2 \leq 0 = f(0,0) \leftarrow f$ tiene max. en $(0,0)$

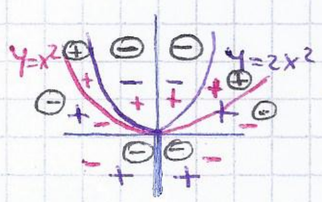
$y=0$: $f(x,0) = x^2 \geq 0 = f(0,0) \leftarrow f$ tiene min. en $(0,0)$.

⑤ $f(x,y) = (2x^2 - y)(y - x^2)$

$\nabla f(x,y) = \big(\underbrace{4x(y-x^2) + (2x^2-y)(-2x)}_{=0}, \underbrace{(-1)(y-x^2) + (2x^2-y)}_{=0}\big)$

$\nabla f(0,0) = (0,0) \Longrightarrow p = (0,0)$ es P.C

$f(0,0) = 0$.



- $2x^2 - y = 0 \Longleftrightarrow y = 2x$

  $2x^2 - y > 0$

- $y - x^2 = 0 \Longleftrightarrow y = x^2$

  $y - x^2 > 0$.

Estoy evaluando a través de curvas tales que f pase por el origen.

También, considerando que hay dos parábolas, ~~[illegible]~~ que anulan a f, evalúo que pasa con y = alguna parábola que sea mayor y menor que ellas.

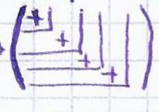
$\boxed{x=0}$ $\quad f(0,y) = -y^2 \leq 0 = f(0,0)$

$\boxed{y = \frac{3}{2}x^2}$ $\quad f(x, \frac{3}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x^4 \geq 0 = f(0,0)$

$\therefore$ $(0,0)$ es punto silla.

CRITERIO DEL HESSIANO: $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^3, $p \in U$, $\nabla f(p) = 0$.

- Si $Hf(p)$ es def. positiva $\Rightarrow$ p es min. local $\rightarrow$



- Si $Hf(p)$ es def negativa $\Rightarrow$ p es max local $\longrightarrow$

- Si $\det Hf(p) \neq 0$ pero no es def. positiva ni negativa $\Rightarrow$ P es punto silla.
- Si $\det Hf(p) = 0$ el criterio no dice nada.

⑥ $f(x,y) = x^5y + xy^5 + xy$

PC : $f_x = 5x^4y + y^5 + y = 0$ $\longrightarrow$ $f_{xx} = 20x^3y$, $f_{xy} = 5x^4+5y^4+1$

$f_y = x^5 + 5xy^4 + x = 0 \longrightarrow f_{yy} = 20xy^3$.

$P = (0,0)$ es P.C.

$$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det Hf_{(0,0)} = -1 \neq 0$.

$\left(\frac{0 \,|}{\;\;\;\;\; -}\right)$

$\therefore$ $(0,0)$ es punto silla

NOTA

PRÁCTICA 5

① $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy = (x^2+y^2)^{1/2} + xy$. Hallar P.C. y clasificarlos.

RTA: $\text{Dom} f = \mathbb{R}^2$.

Buscamos PC.

$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x = 0 \Rightarrow \frac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} + x = 0 \end{cases}$$

$$x\left(\frac{-1}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} + 1\right) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{Abs!} \\ \frac{1}{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2=1} \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ porque f_x y f_y NO están definidas.

- $y = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{x^2+y^2=1}{=} -x \Rightarrow y = -x$
- $x^2+y^2 = 1 \underset{y=-x}{\Longrightarrow} x^2 + \underbrace{(-x)^2}_{=x^2} = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{2} \\ y = -1/\sqrt{2} \end{cases}$ ó $\begin{cases} x = -1/\sqrt{2} \\ y = 1/\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ P.C $= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{puedo usar criterio del hessiano}}$ y $(0,0)$ → no se si es P.C. LO ANALIZO

No se si f es dif. en (0,0). Analizamos ese punto.

$f(0,0) = 0$.

$f(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\geq 0} + \underbrace{xy}_{\geq 0} \geq 0$ si $xy \geq 0$

si $xy < 0$: ¿$\sqrt{x^2+y^2} + xy \geq 0$?

$\sqrt{x^2+y^2} \geq -xy$ elevo al cuadrado $x^2+y^2 \geq x^2y^2$

$x^2+y^2-x^2y^2 \geq 0$

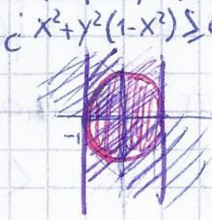
¿$x^2+y^2(1-x^2) \geq 0$?

si $1-x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 1$

$|x| \leq 1$

$\sqrt{x^2+y^2} + xy \geq 0$.

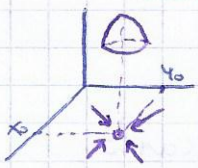


∴ (0,0) es mínimo local.

∴

MAPA DE GRADIENTES

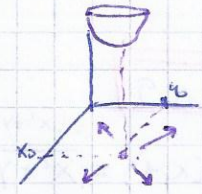
Idea



$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(x_0, y_0) es max local de f

(x_0, y_0) es min local de f

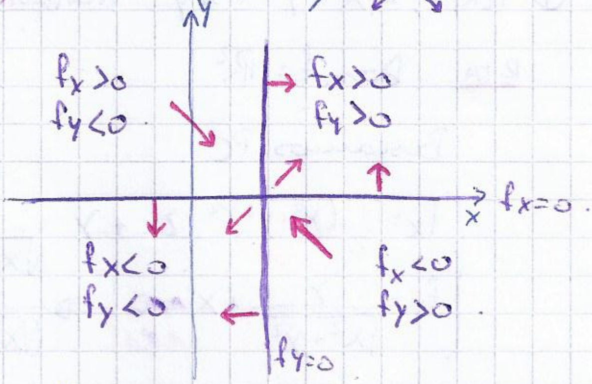


② $f(x,y) = xy - y$

PC: $(1,0)$ $\begin{cases} f_x = y = 0 \\ f_y = x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$

- $f_x = 0 \Leftrightarrow y = 0$
- $f_y = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\nabla f = (f_x, f_y)$



$f_x > 0 \Leftrightarrow y > 0$

$f_y > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$y = -x+1$

$y = x - 1$

$y = -x+1$. $f(x, -x+1) = x(-x+1) + x - 1 = -x^2 + x + x - 1 = -x^2 + 2x - 1$

$= -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2 \leq 0 = f(1,0)$.

$y = x - 1$ $\quad f(x, x-1) = x(x-1) - x + 1 = x^2 - x - x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 = f(1,0)$.

PRÁCTICA 6

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dif, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$(x_0, y_0, z_0) \in S$ $\quad (f(x_0, y_0, z_0) = 0)$

$\pi: \langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$

↳ plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0).

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Graf(f) = \{(x,y,z) / z = f(x,y)\} \subseteq \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) / \underbrace{z - f(x,y)}_{f(x,y,z)} = 0\}$

$S = \{(x,y,z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \{(x,y,z) / \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 1}_{f(x,y,z)} = 0\}$

$(1,0,0) \in S$, $\pi: \langle \nabla f(1,0,0), (x-1, y, z) \rangle = 0$.

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla f(1,0,0) = (2,0,0)$

$\pi: \langle (2,0,0), (x-1, y, z) \rangle = 0$

$2(x-1) + 0y + 0z = 0$

$2(x-1) = 0$.

NOTA

Ejercicio 9 (algo parecido). $\to F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$, probar que $\exists\, U$ entorno del $(0,0)$ y V entorno de $f(0,0)$ tal que $F: U \to V$ es inversible.

Rta. si $\begin{cases} \det(DF(0,0)) \neq 0 \Rightarrow \text{existe.} \\ F \in C^1 \end{cases}$ teo. func. inversa.

$F \in C^1$ ✓

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det DF(0,0) = 1 \neq 0$.

$F: U \to V$ inv, $F^{-1}: V \to U$

$(0,0) \to (1,0)$ $\quad$ $(1,0) \to (0,0)$

$$DF^{-1}_{(1,0)} = \left(DF_{(0,0)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si f tiene inversa en x y es derivable, $\Rightarrow f'(f(x)) = x$

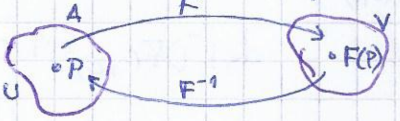
Si derivo, $(f^{-1}(f(x)))' = (x)' = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$

En más variables:

Si $F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, si $F \in C^1(A)$ y $\det DF_P \neq 0$; $P \in A$

$\Rightarrow \exists\, U$ entorno de P y $\exists\, V$ entorno de $F(P)$ tal que $F: U \to V$ es biyectiva, y la inversa es diferenciable.



Además, $DF^{-1}_{F(P)} = (DF_P)^{-1}$

① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^3 + xy + y^3,\ x^2 - y^2)$.

a) Probar que la imagen de f es inversible en un entorno del $(3,0)$

b) Aproximar $f^{-1}(3{,}1, -0{,}2)$

$(1,1) \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (3,0)$

RTA: a) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & x + 3y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

• $Df(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = -16 \neq 0 \Rightarrow$ por TFI, $\exists\, U \subset \mathbb{R}^2$ entorno del $(1,1)$ y $V \subset \mathbb{R}^2$ entorno del $(3,0)$ en donde $f: U \to V$ es biyectiva.

Además, $DF^{-1}_{(3,0)} = (Df(1,1))^{-1}$

b) Quiero aproximar $f^{-1}(3{,}1; 0{,}2)$

$f^{-1}(x,y) \simeq P_2(x,y)$

$P_2(x,y) = f^{-1}(3,0) + Df^{-1}(3,0) \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}$

ahora, $f^{-1}(3{.}1, -0{,}2) \simeq P_2(3,0) = f^{-1}(3,0) + (Df(1,1))^{-1} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = (1,1) + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Calculamos $(Df(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}^{t}}_{\det = 16} = \dfrac{-1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

NOTA

② $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^3e^{x-1}y+xy,\ e^{x^2-1}y^4+x^5)$ tal que la ec. del plano tangente al gráfico de h en $(1,0,h(1,0))$ es $z=3-2x+10y$.

Hallar el plano tg de $h\circ f^{-1}$ en $(0,1,1)$

RTA: • Veo que $f(1,0)=(0,1)$. Además $f\in C^1$

$$(1,0)\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}}(0,1)$$

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2e^{x-1}y+x^3e^{x-1}y+y & x^3e^{x-1}+x\\ e^{x^2-1}y^4\cdot 2x+5x^4 & 4y^3e^{x^2-1}\end{pmatrix}$$

$$Df(1,0)=\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix}=-10=\det \Rightarrow$$ Por TFI $\exists\, U,V$ entornos del $(1,0)$ y $(0,1)$ tal que $f:U\to V$ es biyectiva y f^{-1} es dif.

Es más: $Df^{-1}(0,1)=(Df(1,0))^{-1}=\begin{pmatrix}0&2\\5&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{pmatrix}0&-5\\-2&0\end{pmatrix}^t=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0&-2\\-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

• El plano tangente al gráfico de h en $(1,0,h(1,0))$

$$z=h(1,0)+h_x(1,0)(x-1)+h_y(1,0)(y)$$
$$=h(1,0)-h_x(1,0)+h_x(1,0)x+h_y(1,0)\,y$$
$$=3-2x+10y\Rightarrow h_y(1,0)=10,\ h_x(1,0)=-2,\ h(1,0)=3-2=1.$$

• Plano tg de $h\circ f^{-1}$ en $(0,1,1)$:

$$z=h\circ f^{-1}(0,1)+\nabla(h\circ f^{-1}(0,1))\,(x-0,y-1)$$
$$=h(1,0)+\nabla h(f^{-1}(0,1))\cdot Df^{-1}(0,1)\cdot(x,y-1)$$
$$=1+\nabla h(1,0)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}&0\end{pmatrix}(x,y-1)=1+(-2,10)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}&0\end{pmatrix}(x,y-1)=1+\left(5,-\frac{2}{5}\right)(x,y-1)$$
$$\Rightarrow z=1+5x-\frac{3}{5}(y-1)$$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

$f(x,y,z)=0$ $\qquad$ $x+2y+xz=0$

$f(x,y,\underbrace{\tfrac{-x-2y}{x}}_{\varphi(x,y)})=0$ $\qquad$ $\frac{x+2y}{-x}=z$, $x\neq 0$.

$$f(x,y,\varphi(x,y))=0\xrightarrow{\text{derivo}} f_x(x,y,\varphi(x,y))=0=f_x(x,y,\varphi(x,y))+f_z(x,y,\varphi(x,y))\cdot\varphi_x(x,y)$$

$$\Rightarrow \varphi_x(x,y)=\frac{-f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

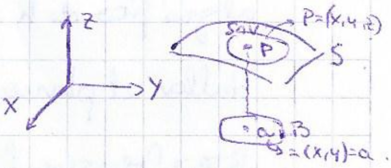
$$\varphi_y(x,y)=\frac{-f_y(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

TEO. función implícita:

si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ clase C^1, sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=0\}$ sup derivable de f.

(si quiero despejar z en términos de x e y) si $f_z(P)\neq 0$, $P\in S$

$\Rightarrow \exists B\subset\mathbb{R}^2$ y $V\subset\mathbb{R}^3$ / y $\varphi: B\to S\cap V$



$$\varphi_x(x,y)=\frac{-f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

$$\varphi_y(x,y)=\frac{-f_y(\cdots\cdots)}{f_z(\cdots\cdots)}$$

① $f(x,y,z)=x^2y^2-ze^y+z$, probar q $f(x,y,z)=0$ define una función implícita $y=\varphi(x,y)$ en un entorno de $(x,z)=(0,1)$ / $f(x,\varphi(x,z),z)=0$ $\forall (x,z)$ en el entorno

Rta: $S=\{(x,y,z)/ x^2y^3-ze^{y-1}+z=0\}$

$\Rightarrow (0,y,1)\in S \Leftrightarrow 0^2y^3-1e^{y-1}+2=0 \Rightarrow e^{y-1}=2 \Leftrightarrow y-1=\ln 2 \Leftrightarrow y=\ln(2)+1$

$\Rightarrow P=(0,1+\ln(2),1)\in S$

$f_y(x,y,z)=3y^2x^2-ze^{y-1}$

$f_y(0,1+\ln(2),1)=2\neq 0 \overset{TFI}{\Longrightarrow}$ $\exists$ entorno de $(0,1)$, $\exists V$ entorno de $(0,1+\ln 2,1)$ y $\varphi: B\to\mathbb{R}$ / graf $\varphi = S\cap V$

② $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=z^3-2yz+y$

a) $f(x,y,z)=$ def una f: $z=\varphi(x,y)$ en un entorno del $(1,0)$ / $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ $\forall (x,y)$ en ese entorno.

b) si $\varphi\in C^2$ calcular su pol de taylor alrededor del $(1,0)$

Rta: a) $\alpha=(1,0) \Rightarrow P=(1,0,z)\in S \Leftrightarrow z^3+1=0 \Leftrightarrow z=-1$

$f_z(1,0,-1)\neq 0$ $\qquad \exists z=\varphi(x,y): B\to\mathbb{R}$

b) $P_2(x,y)=\varphi(1,0)+\varphi_x(1,0)(x-1)+\varphi_y(1,0)(y)+\frac{1}{2}\left(\varphi_{xx}(1,0)(x-1)^2+\varphi_{yy}(1,0)y^2+2\varphi_{xy}(1,0)(x-1)y\right)$

$$\varphi_{xx}(x,y)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-f_x(\cdots\cdots)}{f_z(\cdots\cdots)}\right)=$$

$$=-\frac{\left[\frac{d}{dx}\left(f_x(x,y,\varphi(x,y))\right)f_z(x,y,\varphi(x,y))-f_x(x,y,\varphi(x,y))\frac{d}{dx}f_z(\cdots)\right]}{f_z(\cdots)^2}$$

$$=\left[-\left(f_{xx}(\cdots)+f_{xz}(\cdots)\right)+f_x(\cdots)\left[f_{zx}+f_{zz}\varphi_x(\cdots)\right]\right]\cdot\frac{1}{f_z(\cdots)^2}$$

NOTA

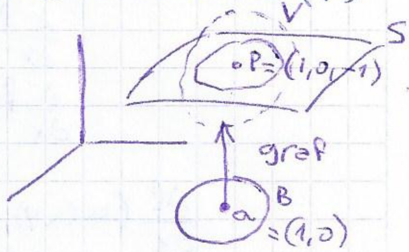
Función implícita.

① $f(x,y,z) = z^3 - 2yz + x$

a) $f(x,y,z)=0$ define una función $z = \varphi(x,y)$ C^1 en un entorno del $(1,0)$ / $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ $\forall (x,y)$ en ese entorno.

b) Si $\varphi \in C^2$, calcular su pol. de Taylor de orden 2 alrededor del $(1,0)$

Rta: a) $P = (1,0,z) \in S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0\}$



$\Leftrightarrow z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$

$f_z(x,y,z) = 3z^2 - 2y$, como $f_z(1,0,-1) = 3 \neq 0$

por el TFI $\exists$ B entorno del $(1,0)$ y V entorno del $(1,0,-1)$, y $\varphi = \varphi(x,y) : B \to \mathbb{R}$ tal que graf$(\varphi) = S \cap V$

Además, $\varphi_x(x,y) = -\dfrac{f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$ $\forall (x,y) \in B$.

$\varphi_y(x,y) = -\dfrac{f_y(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$ " "

b) $P_2(x,y) = \underbrace{\varphi(1,0)}_{=-1} + \underbrace{\varphi_x(1,0)}_{=-1/3}(x-1) + \underbrace{\varphi_y(1,0)}_{-\frac{2}{3}} y + \frac{1}{2}\left[\varphi_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2\varphi_{xy}(1,0)(x-1)y + \varphi_{yy}(1,0)(y)^2\right]$

$\varphi_x(1,0) = \dfrac{-f_x(1,0,-1)}{f_z(1,0,-1)} = \dfrac{-1}{3}$

$\varphi_y(1,0) = -\dfrac{f_y}{f_z}(1,0,-1) = \dfrac{-2}{3}$

$f_x = 1$, $f_y = -2z$, $f_z = 3z^2 - 2y$

$f_{xx} = 0 = f_{xy} = f_{xz}$
$f_{yx} = 0 = f_{yy} = f_{xz}$
$f_{yz} = -2$; $f_{zz} = 6z$

$$\varphi_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{f_x}{f_z}(x,y,\varphi(x,y))\right) \overset{\text{deriv. del cociente}}{=} \frac{-\left[\frac{\partial}{\partial x}(f_x(x,y,\varphi))\, f_z(x,y,\varphi) - f_x(x,y,\varphi)\cdot \frac{\partial}{\partial x}(f_z(x,y,\varphi))\right]}{f_z(x,y,\varphi)^2}$$

$\boxed{\text{AUX}}$ $\dfrac{\partial}{\partial x}(f_x(x,y,\varphi(x,y))$

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \in \mathbb{R}^2 \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[rr, bend right, "f_x \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}"'] & (\underset{u(x,y)}{x}, \underset{v(x,y)}{y}, \varphi(x,y)) \arrow[r, bend left, "f_x"] & f_x(x,y,\varphi(x,y))
\end{tikzcd}$$

$$\overset{1\times2}{\nabla(f_x \circ h)} = \overset{1\times3}{\nabla f_x(h(x,y))}\ \overset{3\times2}{Dh(x,y)}$$

$$\left(f_{xx}(h(x,y))\ f_{xy}(h(x,y))\right) = \left(f_{xx}\ f_{yx}\ f_{zx}\right)\Big|_{h(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_x(x,y) & \varphi_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(h(x,y)) + f_{zx}(h(x,y))\,\varphi_x(x,y) \\ f_{yx}(h(x,y)) + f_{zx}(h(x,y))\,\varphi_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

NOTA

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x(1,0,-1)) = f_{xx}(1,0,-1) + f_{zx}(1,0,-1)\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_x(1,0,-1)) = f_{xy}(1,0,-1) + 0 = 0 .$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(1,0) = -\frac{[0 \cdot f_z(1,0,-1) - f_x(1,0,-1) \cdot \underline{\qquad}]}{f_z(1,0,-1)^2}$$

Obs. que $\frac{\partial}{\partial x} f_x(x,y,\varphi(x,y)) = f_{xx}(x,y,\varphi) \cdot 1 + \cancel{f_{xy}(x,y,\varphi)} \cdot 0 + f_{xz}(x,y,\varphi) \cdot \varphi_x(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial y} f_x(x,y,\varphi(x,y)) = \cancel{f_{xx}(x,y,\varphi)} \cdot 0 + f_{xy}(x,y,\varphi) \cdot 1 + f_{xz}(x,y,\varphi) \cdot \varphi_y(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x} f_z(x,y,\varphi(x,y)) = f_{zx}(x,y,\varphi) \cdot 1 + f_{zy}\cancel{(x,y,\varphi)} \cdot 0 + f_{zz}(x,y,\varphi) \cdot \varphi_x(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial x} f_z(1,0,-1) = 0 - 6(-1) = 6 .$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y), v(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} .$$

EXTREMOS RESTRINGIDOS

Tenemos $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, queremos encontrar los extremos de f en A.

① $f(x,y) = x^2 + y^2 + x \qquad B = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

hallar los extremos de f en B

RTA • en B° $\quad \nabla f(x,y) = (2x+1, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (-\frac{1}{2}, 0) = P_1$

$Hf(-\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_1$ es min local, $f(P_1) = -\frac{1}{4}$

• en ∂B $\quad \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi) \quad \Rightarrow$ P_2 max abs de f en B
P_3 min " " " " "

$g(t) = f(\alpha(t)) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + \cos t = 1 + \cos t .$

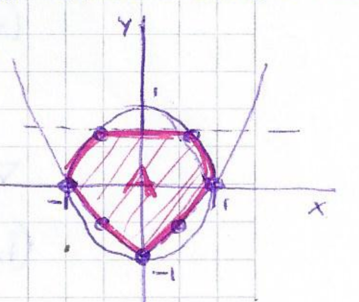
$g'(t) = -\operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow t = \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ si $t = 0 \to P_2 = (1,0)$
$f(P_2) = 2$

si $t = \pi \to P_3 = (-1,0)$
$f(P_3) = 0$

② $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $A = \{x^2 - 1 \leq y\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{y \leq \frac{1}{2}\}$ Hallar extremos absolutos de f en A

RTA: • en A°: $\nabla f(x,y) = (2x+y, 2y+x) = (0,0) \Leftrightarrow y = -2x = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 = x = y$

$P_1 = (0,0)$, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1$ min. local
$f(P_1) = 0 .$



• en ∂A: • $\alpha(t) = (t, \frac{1}{2})$, $t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$g(t) = f(\alpha(t)) = t^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t$

$\Longrightarrow$

$g'(t) = 2t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = P_1}$ $\boxed{\begin{matrix} P_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ P_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix}}$

• $\alpha(t) = (t, t^2-1)$, $t \in [-1, 1]$

$g(t) = f(\alpha(t)) = t^2 + (t^2-1)^2 + t(t^2-1)$

$g'(t) = 2t + 2(t^2-1)2t + 3t^2 - 1$

$= 4t^3 + 3t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & & -4 & 1 & 1 \\ \hline & 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4}$ → $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, $\frac{1-\sqrt{17}}{8}$

$t = -1$ es raíz

$g'(t) = (t+1)(4t^2 - t - 1) = \left(t - \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)}_{0,64}\right)\left(t - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)}_{-0,39}\right)(t+1)$

$$\boxed{\begin{aligned} P_4 &= (-1, 0) \\ P_5 &= (0{,}64, 0{,}64^2 - 1) \\ P_6 &= (-0{,}39, 0{,}39^2 - 1) \end{aligned}}$$

$\boxed{P_7 = (1, 0)}$ $\boxed{P_8 = (0, -1)}$

• $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right]$

$g(t) = f(\alpha(t)) = 1 + \cos t \operatorname{sen} t$

$g'(t) = -\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = \cos(2t) = 0$

$2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$t = \frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{P_9 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Como f es cont. en A y A es compacto,

$P_1 = (0,0)$ es el min. abs. de f en A, $f(P_1) = 0$

$P_4 = (-1, 0)$ es el max abs de f en A.

TEOREMA: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$g: V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
C^1; $S = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) = 0\}$; $f/_S$

Si $x_0 \in S$ es pto crítico, $f/_S$ y $\nabla g(x_0) \neq 0$ entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x_0)$

1. ① Encontrar los extremos absolutos de $f(x,y) = xy^2$ en $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \overbrace{x^2+y^2 \leq 4}^{\text{circ.}}, \overbrace{x \leq 5/3}^{\text{recta}}\}$

RTA: Hago dibujo;

1. Hallo puntos críticos en el interior de $f \in C^1$
2. Hallo puntos críticos en el borde.

1. Ubico a todos los puntos críticos sin restricción: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$f_x = y^2 = 0$
$f_y = 2xy = 0$ $\iff y = 0 \Rightarrow$ puntos de la forma $\boxed{(x,0)}$ Segmento de puntos críticos en el interior del conjunto.

2. PC $\Rightarrow$ intersección de bordes.

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x = 5/3 \end{cases} \Rightarrow y^2 = \frac{11}{9} \Rightarrow$ dos puntos: $\left(\frac{5}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3}\right)$ y $\left(\frac{5}{3}; -\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$

Analizo bordes:

recta: $x = \frac{5}{3}$; $\frac{-\sqrt{11}}{3} \leq y \leq \frac{\sqrt{11}}{3}$

$f\left(\frac{5}{3}, y\right) = \frac{5}{3}y^2 = g(y)$

$g'(y) = \frac{10}{3}y = 0 \iff y = 0 \Rightarrow$ pto crítico $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

Borde de circunferencia: $x^2+y^2=4$, $x \leq 5/3$

opción 1 $\to$ parametrizo:

$(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta)$, calculo rango del ángulo: $\ldots \leq \theta \leq \ldots$

opción 2 $\to$ Uso Multiplicadores de Lagrange

$S = \{x^2+y^2=4\} = \{\overbrace{x^2+y^2-4}^{g(x,y)} = 0\}$; $g \in C^1$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \iff x = y = 0$. Punto $(0,0) \notin S \Rightarrow \nabla g \neq 0$ en S.

Donde el gradiente se anula, no se puede usar el teorema $\Rightarrow$ lo agrego como P.C.

$f \in C^1$, $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ $\begin{cases} y^2 = \lambda 2x \\ \cancel{2}xy = \lambda \cancel{2}y \iff xy = \lambda y \iff xy - \lambda y = 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$y(x-\lambda) = 0 \iff y = 0$ ó $x = \lambda$.

$\Longrightarrow$

• Caso $Y=0$: Si $Y=0$, $x^2+0^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ó $x=-2 \Rightarrow (2,0)\ (-2,0)$.

Debo chequear que $\exists\lambda$ para poder afirmar que $(2,0)$ y $(-2,0)$ son P.C.

$(2,0) \rightarrow 0=4\lambda \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \exists\lambda$

$(-2,0) \rightarrow 0=-4\lambda \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \exists\lambda$.

• Caso $X=\lambda$ Me conviene la 1ra ecuación.

$y^2=\lambda\cdot 2\lambda \Rightarrow y^2=2\lambda^2$.

$\Rightarrow x^2+y^2=\lambda^2+2\lambda^2=4$

$3\lambda^2=4 \Rightarrow \lambda^2=\frac{4}{3} \rightarrow \lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ó $\lambda=\frac{-2}{\sqrt{3}}$

Si $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ Como $x=\lambda \rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

y tengo que $y^2=\frac{8}{3} \Rightarrow y=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ó $y=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow$ para $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$ tengo 2 puntos críticos: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

Si $\lambda=-\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{-2}{\sqrt{3}}$; $y^2=\frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ para $\lambda=\frac{-2}{\sqrt{3}}$ tengo 2 p.c $\Rightarrow \left(\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

Seleccionamos los puntos críticos que me interesan.

Como C es compacto y f continua

$\Rightarrow f/_C$ alcanza máximo y mínimo absoluto.

Evalúo f en cada P.C.

② Hallar el punto del plano $x+3y-z=6$ más cercano al origen.

RTA: Traduzco el problema: Hallo mínimo de $f(x,y,z) = \text{dist}((x,y,z);(0,0,0))$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = d$$

Me conviene trabajar con $d^2 \Rightarrow f(x,y,z) = d^2 = x^2+y^2+z^2$.

• Buscamos el mínimo de f en $S = \{x+3y-z=6\} = \{\underbrace{x+3y-z-6}_{=g(x,y,z)} = 0\}$

obs: No es compacto, es cerrado (el complemento es abierto)

No es acotado $\Rightarrow$ S no es compacto.

• Buscamos puntos críticos con lagrange

Chequeo la hipótesis

$g \in C^1$, $\nabla g(x,y,z) = (1,3,-1) \neq 0$.

$f \in C^1$, entonces planteo: $\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\lambda \\ 2y = 3\lambda \Rightarrow y = \frac{3}{2}\lambda \\ 2z = -\lambda \Rightarrow z = \frac{-\lambda}{2} \\ x+3y-z=6 \end{cases}$$

Reemplazo en la última ecuación:

$\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{11}{2}\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{11}$

Punto crítico será: $\left(\frac{6}{11}, \frac{18}{11}, \frac{-6}{11}\right)$

debo justificar que este punto es un mínimo.

Sabemos que el punto crítico está en un plano $\Rightarrow$ tiene sentido decir que ese es el único punto crítico. El plano está acotado. ¿Cómo justifico esto último?

• Me fijo cuánto vale la función en P. Vemos, entonces, que $d(P,\vec{0})$ es:

$f(P) = \frac{6\sqrt{11}}{11}$; $\text{dist}(P,\vec{0}) = \sqrt{\frac{6\sqrt{11}}{11}} = R$.

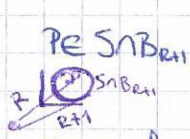
Not: $B_K = \{(x,y,z) / x^2+y^2+z^2 \leq K^2\}$ Esfera de radio K (bola suficientemente grande)

$S \cap B_{R+1}$ obs: es compacto.

$F/_{S\cap B_{R+1}}$ alcanza max. y mín. absolutos.

• Calculamos puntos críticos de la intersección. De ella distingo borde e interior.

$P \in S \cap B_{R+1} \rightarrow P \in S$ ✓



$\hookrightarrow P \in B_{R+1}$ porque $f(P) = R^2$ y $R^2 \leq (R+1)^2 \Rightarrow P \in B_{R+1}$.

Todos los del borde y P son los puntos críticos.

$\Rightarrow$ todos los puntos del borde tienen una distancia $R+1$ con el $(0,0)$ y P tiene una distancia R con el borde.

NOTA

Quiere decir que los puntos del borde son máximos y P es mínimo.

• En todos los puntos del borde, f vale $(R+1)^2$ y $f(P)=R^2$

Como el conjunto es compacto, hallo máximo y mínimo.

$\Rightarrow$ los puntos de borde son max. y el punto P es min.

Obs: la bola está centrada en el origen.

Como $f(P)=R^2$ y $f(\text{punto del borde})=(R+1)^2 \Rightarrow R^2<(R+1)^2$.

P es mínimo de $f/_{S\cap B_{R+1}}$, y todos los demás son máximos.

$\Rightarrow f(P)\leq f(\vec{x}) \quad \forall x\in S\cap B_{R+1}$

En $S\cap(B_{R+1})^c$: $\vec{x}\in S\cap(B_{R+1})^c \Rightarrow$

$f(\vec{x})\geq(R+1)^2>R^2=f(P)$

$f(P)<f(\vec{x})$.

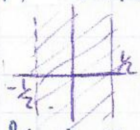
$\therefore f(P)<f(x) \quad \forall x$ en el plano.

Si $(0,0)$ hubiese sido $(2,0)$

tomo una bola centrada en $(2,0)$

Ejercicio 7 de la guía: Encontrar máximos y mínimos de la función

$f(x,y)=y+x-2xy$ en $R=\{(x,y)/|x|\leq \frac{1}{2}\}$

RTA:  Esto no es compacto, es cerrado pero no acotado.

$f(x,y)=y+x-2xy$: buscamos P.C en el interior.

$\begin{cases} f_x=1-2y=0 \\ f_y=1-2x=0 \end{cases} \Rightarrow$ tenemos el punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\notin$ Int. Por ahora lo descarto

En el borde:

$x=-\frac{1}{2}$: $f(-\frac{1}{2},y)=y-\frac{1}{2}+y=2y-\frac{1}{2}$ es una recta, no tiene puntos críticos.

$g'(y)=2\neq0$ parte anulo.

en $x=-\frac{1}{2}$ no hay puntos críticos

¿Qué pasa en $x=\frac{1}{2}$?

Si $x=\frac{1}{2}$. $f(\frac{1}{2},y)= y+\frac{1}{2}-y=\frac{1}{2}$

$g'(y)=0 \Rightarrow$ todos los puntos de esa recta son P.C

Obs: No es compacto, no puedo asegurar si alcanza max o min.

Como $f(\frac{1}{2},y)=\frac{1}{2}$, comparo $f(x,y)$ con $f(\frac{1}{2},y)$

$f(x,y)\ ?\ f(\frac{1}{2},y)$

$y+x-2xy\ ?\ \frac{1}{2}$

$y+x-2xy-\frac{1}{2}\ ?\ 0$ lo comparo con $0 \Rightarrow$ ¿es >0 o <0?

$y-\frac{1}{2}-2x(y-\frac{1}{2})\ ?\ 0$

$(y-\frac{1}{2})-2x(y-\frac{1}{2})\ ?\ 0$

$(y-\frac{1}{2})(1-2x)\ ?\ 0$. $\rightarrow$ $1-2x>0$

¿$(y-\frac{1}{2})$ es >0 o <0? $\Rightarrow$ depende de $(y-\frac{1}{2})$

Si tomo $(\frac{1}{2},y_0)$ con $y_0<\frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2},y_0)$ es máximo local.

Si tomo $(\frac{1}{2},y_0)$ con $y_0>\frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2},y_0)$ es mínimo local.

NOTA

- PRÁCTICA 8 - INTEGRACIÓN

REPASO DE MÉTODOS DE INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}$

- Sustitución

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$$

$u = \operatorname{sen} x$
$du = \cos x\, dx$

$$\int x\sqrt{3x^2+7}\, dx = \frac{1}{6}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{6}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}(3x^2+7)^{3/2} + C$$

$3x^2+7 = u$
$6x\,dx = du$

$$\int_{10}^{11} \frac{1}{x-3}\, dx = \ln|x-3|\Big|_{10}^{11} = \ln|11-3| - \ln|10-3| = \ln 8 - \ln 7$$

AUX: $\int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|x-3| + C$ $\quad u = x+3;\ du = dx$

- Partes

$$(u(x)v(x))' = u'v + uv' \Rightarrow \int (uv)' dx = \int u'v\, dx + \int uv'\, dx$$

$$\Rightarrow \int uv' dx = -\int u'v\, dx + \int (uv)' dx \Rightarrow \int uv' dx = +uv - \int vu' dx$$

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

$u = x \quad v = x - x\ln x$
$du = dx \quad dv = \ln x\, dx$

$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}dx$
$v = \frac{x^2}{2} \quad dv = x\, dx$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2\cos x + 2\int \cos x \cdot x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx\right]$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

AUX:
$u = x^2 \quad du = 2x\,dx \quad ; u = x \quad du = dx$
$v = -\cos x \quad dv = \operatorname{sen} x\, dx \quad ; v = \operatorname{sen} x \quad dv = \cos x\, dx$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, e^x dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x\cos x + \int e^x \cos x\, dx\right]$$

$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \cos x\, dx = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

AUX
$u = e^x \quad du = e^x dx$
$v = \operatorname{sen} x \quad dv = \cos x\, dx$

AUX
$u = e^x \quad du = e^x dx$
$v = -\cos x \quad dv = \operatorname{sen} x\, dx$

$$\int \cos(x^2)\, dx = \text{ejercicio}$$

• **FRACCIONES SIMPLES**

• $\int \frac{6}{x^2-9}dx = 6\int\frac{1}{x^2-9}dx = 6\left(\frac{1}{6}\int\frac{1}{x-3}dx + \left(-\frac{1}{6}\right)\int\frac{1}{x+3}dx\right) = \int\frac{1}{x-3}dx - \int\frac{1}{x+3}dx$

$= \ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

Aux:

$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+3)}{(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow A(x-3)+B(x+3)=1 \Rightarrow$ si $x=-3 \Rightarrow B=-\frac{1}{6}$

si $x=3 \Rightarrow A=\frac{1}{6}$

• $\int\frac{8}{(x+3)(x^2+9)}dx \overset{①}{=} \frac{8}{18}\int\frac{1}{x+3} + 8\int\frac{-\frac{1}{18}x+\frac{1}{6}}{x^2+9} = \frac{4}{9}\ln|x+3| - \frac{4}{9}\int\frac{x}{x^2+9}dx + \frac{4}{3}\int\frac{1}{x^2+9}dx + C$

$= \frac{4}{9}\ln|x+3| - \frac{2}{9}\ln|x^2+9| + \frac{4}{9}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

Aux

① $\frac{1}{(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+9)}$

$\Rightarrow A(x^2+9)+(Bx+C)(x+3)=1$

si $x=-3 \to A=\frac{1}{18}$

si $x=0 \to \frac{1}{2}+3C=1 \to C=\frac{1}{6}$

si $x=1 \to \frac{10}{18}+\left(B+\frac{1}{6}\right)4=1$

$\hookrightarrow B=\left(1-\frac{5}{9}\right)\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{18}$

AUX1: $u=x^2+9$, $du=2x\,dx$

$\int\frac{x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|x^2+9|+C$

AUX2 $\int\frac{\frac{1}{9}}{\frac{x^2}{9}+1}dx = \frac{1}{9}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{9}\int\frac{1}{u^2+1}du$ $\quad u=\frac{x}{3}$, $3\,du=dx$

$=\frac{1}{3}\,\text{arctg}(u)+C = \frac{1}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

• $\int\frac{1}{(x+3)^3}dx = \int\frac{A}{(x+3)}dx + \int\frac{B\,dx}{(x+3)^2}+\int\frac{C\,dx}{(x+3)^3} = \ln|x+3| - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+3)^2}+C$

Aux:

$\frac{1}{(x+3)^3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}=\frac{A(x+3)^2+B(x+3)+C}{(x+3)^3}$

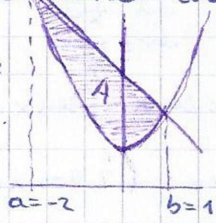
$\Rightarrow A(x+3)^2+B(x+3)+C=1 \rightsquigarrow A,B,C$

Aux: $\int\frac{1}{(x+3)^2}dx=\int\frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}+C = -\frac{1}{x+3}+C$

$u=x+3 \quad du=dx$

① Calcular el área encerrada por $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=-x+3$

RTA:



Área(A) $=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} 3-x-x^2-1\,dx = ⊛$

$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2+1=-x+3$

$x^2+x=2 \to \begin{cases}x=1\\x=-2\end{cases}$

⊛ $\int_{-2}^{1} 2-x-x^2\,dx = 2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right) > 0$

$= \frac{49}{6}$

INTEGRALES IMPROPIAS

• $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right) = \frac{1}{2}$.

• $\int_{-\infty}^0 e^{sx}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^{sx}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{sx}}{s}\Big|_t^0 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{s}(1-e^{st}) = \frac{1}{s}$.

• $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = 2-0=2$.

• $\int_1^\infty x^p\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^p\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_1^t = \frac{1}{p+1}\left(\lim_{t\to\infty} t^{p+1} - 1\right) = L$.

si $P+1=0 \to L =$ ~~...~~ indeterminado $\to L=\infty$.
si $P+1>0 \Rightarrow L=\infty$
si $P+1<0 \Rightarrow L=\frac{-1}{P+1}>0$.

② Analizar la convergencia de $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^8+1}}\,dx$

RTA: $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^8+1}}\,dx \le \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^8}}\,dx = \int_0^\infty x^{-3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_0 = \infty$ no me sirve.

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^8+1}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^8+1}}\,dx \le \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^8}}\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^{1-4+1}}{2}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2} + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(t^{-2}-1)$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$.

$\Rightarrow$ converge.

③ $\int_{-\infty}^\infty x\,dx = \int_{-\infty}^0 x\,dx + \int_0^\infty x\,dx = \infty$.

Pero, se define:

$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$.

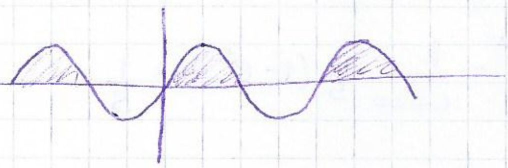
P.V $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\int_{-t}^t f(x)\,dx$.

Pueden no coincidir.

P.V $\int_{-\infty}^\infty x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^t x\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(t^2-t^2) = 0$.

$\cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0$

$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx$



INTEGRALES IMPROPIAS

① $\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \int_1^t \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \ln(|x-2|)\Big|_1^t = \lim_{t\to 2^-} \ln|t-2| - \ln|1-2|$

$= \lim_{t\to 2^-} \ln|t-2| = -\infty$ $\therefore \int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx$ diverge.

② $\int_1^4 \frac{1}{x-2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_2^4 \frac{1}{x-2}$

Decimos que $\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx$ converge $\iff \int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx$ y $\int_2^4 \frac{1}{x-2}dx$ convergen.

Como $\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx$ diverge $\Longrightarrow \int_1^4 \frac{1}{x-2}\,dx$ diverge.

③ $\int_1^4 \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx$ Tiene que quedarme un problema por integral. Acá me encuentro con dos, los tengo que separar o sea:

$$\int_1^4 \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^5 + \int_5^{+\infty}$$

④ $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln^2(1)}{2} - \frac{\ln^2(t)}{2} = -\infty$

C.A: $\left.\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array}\right\} \int u\,du = \frac{u^2}{2}$ $\therefore \int_0^1 \frac{\ln x}{x}$ diverge.

Recuerdo:

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{Converge si } P>1 \\ \text{diverge si } 0<P\leq 1 \end{cases}$ $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{diverge } P\geq 1 \\ \text{converge } 0<P<1 \end{cases}$

Def: Decimos que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge.

Decimos que converge condicionalmente si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge y $\int_a^b |f(x)|\,dx$ diverge.

Obs: IMPORTANTE: Si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ Converge.

⑤ $\displaystyle\int_0^1 \overbrace{\frac{\cos^2(e^x)}{\sqrt{x}}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right)}^{f(x)} dx$

Como $f(x)$ no es ≥ 0, estudio $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$

Por criterio de comparación:

$$|f(x)| = \frac{\cos^2(e^x)}{\sqrt{x}}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right)\right| \overset{|\cos|\leq 1,\ |\operatorname{sen}|\leq 1}{\leq} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} \quad ; \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \text{ converge.}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge

⑥ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^4+3}}}_{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+3}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+3}}\,dx$

f cont. en $[0,1]$

$\cancel{\frac{x}{\sqrt{x^4+3}} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}}$ $\Rightarrow f$ integrable en $[0,1]$

$\cancel{\sqrt{x^4+3} \geq \sqrt{x^4} = x^2}$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^4+3}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ ambas integrales se comportan igual.

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

CRITERIO DE COMPARACIÓN.

$f,g: [a,b) \to \mathbb{R}$, $f,g \geq 0$ y $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ (integrable)
$(a,b]$ $(a,b]$

Entonces • si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

• si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge.

CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE.

$f,g: [a,b) \to \mathbb{R}$ integrables, $f,g\geq 0$.
• $(a,b]$

Si $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ existe, entonces:
• $x\to a$

• si $L\neq 0$, $\displaystyle\int_a^b f(x)$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge.

• si $L=0$, si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge

• si $L=+\infty$, si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

NOTA

(7) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx = \int_2^3 + \int_3^4 = I_1 + I_3$

AUX: $-x^2+6x-8=0$ $\begin{cases} \to x=2 \\ \to x=4 \end{cases}$ PROBLEMAS.

$\hookrightarrow = -(x-2)(x-4)$.

Analizo $I_1 = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-(x-2)(x-4)}}\,dx$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{-(x-2)(x-4)}}}{\frac{1}{\sqrt{x-2}}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{-(x-4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2^+} \int_t^3 (x-2)^{-1/2}\,dx = \lim_{t\to 2^+} 2(x-2)^{1/2}\Big|_t^3 =$$

$$= \lim_{t\to 2^+} \underbrace{2(3-2)^{1/2}}_{2} - \underbrace{2(t-2)^{1/2}}_{\to 0} = 2 \qquad \therefore\ I_1 \text{ converge.}$$

Analizo $I_2 = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{-(x-2)(x-4)}}\,dx$

$$\lim_{t\to 4^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{-(x-2)(x-4)}}}{\frac{1}{\sqrt{-(x-4)}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{-(x-4)}}\,dx = \int_3^4 (4-x)^{-1/2}\,dx.$$ y sigo análogamente.

INTEGRALES DOBLES.

① $\iint_D xy\,dx\,dy \quad , \quad D=[0,1]\times[0,2]$

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{x^2}{2}y\Big|_0^1 dy = \int_0^2 \frac{1}{2}y\,dy = \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(2-0) = 1.$$

$$\iint_D xy\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^2 xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dx = \int_0^1 x\cdot 2\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

② $\iint_D \cos^2(x2)\,dx\,dy \quad , \quad D=[0,\pi]\times[1,2]$

AUX: $\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{a}\int \frac{\cos(2u)+1}{2}\,du = \frac{1}{a}\frac{1}{2}\int \cos(2u)\,du + \frac{1}{2a}\int 1\,du =$

$ax=u;\ dx=du/a$ $\qquad$ $2u=v$, $du=\frac{dv}{2}$

① $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$

$\cos^2x-\sin^2x-\cos^2x+\cos^2x=\cos 2x$

$2\cos^2x-1=\cos 2x \iff \cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$

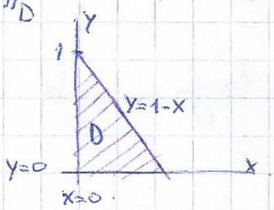
$$=\frac{1}{4a}\int \cos v\,dv+\frac{1}{2a}u = \frac{1}{4a}\sin v+\frac{1}{2a}u$$

$$=\frac{1}{4a}\sin(2ax)+\frac{1}{2a}ax = \boxed{\frac{1}{4a}\sin(2ax)+\frac{x}{2}}$$

$$\iint_D \cos^2(x2)\,dx\,dy = \int_1^2\int_0^\pi \cos^2(x2)\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{1}{4\cdot 2}\sin(2\cdot 2x)+\frac{x}{2}\Big|_0^\pi dy = \int_1^2 \cancel{\frac{1}{8}\sin(4\pi)}+\frac{\pi}{2}\,dy$$

$$=\int_1^2 \frac{\pi}{2}\,dy = \frac{\pi}{2}(2-1) = \frac{\pi}{2}.$$

③ $\iint_D x^2(y+1)\,dx\,dy \quad , \quad D=\{(x,y)/\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq 1-x$



Parametrizo D

Como tipo I: $\quad 0\leq x\leq 1, \qquad 0\leq y\leq 1-x$

Como tipo II: $\quad 0\leq y\leq 1 \qquad 0\leq x\leq 1-y$

$$\Rightarrow \iint_D x^2(y+1)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} x^2(y+1)\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_0^{1-x} dx.$$

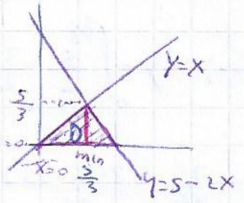
$$=\int_0^1 x^2\left(\frac{(1-x)^2}{2}+(1-x)\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2(1-2x+x^2)+x^2-x^3\,dx.$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^5}{5}-\frac{2x^4}{4}+\frac{3}{2}\frac{x^3}{2}\Big|_0^1 = \underline{\text{terminar.}}$$

como tipo II:

$$\iint_D x^2(y+1)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-y} x^2(y+1)\,dx\,dy = \underline{\text{ejercicio}}.$$

④ $\iint_D \cancel{xy}\overset{x^2(y+1)}{}\,dx\,dy \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq 0, y\geq 0, y\leq 5-2x, y\leq x\}$



$5-2x=x$
$5=3x$
$x=\frac{5}{3}$

Parametrizo

Tipo I: escribo a D como $D_1 \cup D_2$: $D_1 = \triangle$ $\quad D_2 = \triangle$

$D_1: 0\leq x\leq \frac{5}{3}, \quad 0\leq y\leq x$

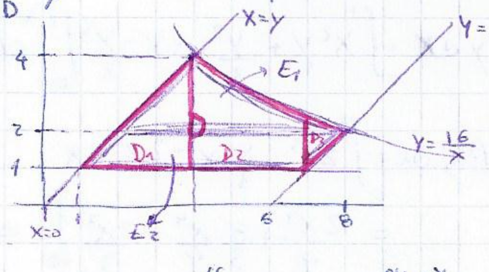
$D_2: \frac{5}{3}\leq x\leq \frac{5}{2}, \quad 0\leq y\leq 5-2x$

Tipo II: $0\leq y\leq \frac{5}{3}, \quad y\leq x\leq \frac{5-y}{2}$

$$\iint_D x^2(y+1)\,dx\,dy = \int_0^{5/3}\int_0^{x} x^2(y+1)\,dy\,dx + \int_{5/3}^{5/2}\int_0^{5-2x} x^2(y+1)\,dy\,dx \quad (\text{Tipo I})$$

$$\iint_D x^2(y+1)\,dx\,dy = \int_0^{5/3}\int_y^{\frac{5-y}{2}} x^2(y+1)\,dx\,dy$$

⑤ $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy \quad D=\{(x,y) / xy\leq 16, x\geq y, x-6\leq y, x\geq 0, y\geq 1\}$



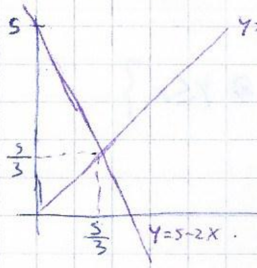
Tipo I: $D_1: 1\leq x\leq 4, \quad 1\leq y\leq x$
$D_2: 4\leq x\leq 7, \quad 1\leq y\leq 16/x$
$D_3: 7\leq x\leq 8, \quad x-6\leq y\leq 16/x$

Tipo II: $E_1: 2\leq y\leq 4, \quad y\leq x\leq 16/y$
$E_2: 1\leq y\leq 2 \quad y\leq x\leq y+6$

$\Rightarrow$ Como tipo I: $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_1^4\int_1^x \frac{x}{y}\,dy\,dx + \int_4^7\int_1^{16/x} \frac{x}{y}\,dy\,dx + \int_7^8\int_{x-6}^{16/x} \frac{x}{y}\,dy\,dx$

Como tipo II: $\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_2^4\int_y^{16/y} \frac{x}{y}\,dx\,dy + \int_1^2\int_y^{y+6} \frac{x}{y}\,dx\,dy$

⑥ Calcular el área de $D = \{(x,y) / x \geq 0, y \geq 0, y \leq 5-2x, y \leq x\}$



$$\text{Área}(D) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{12}$$

$$\iint_D 1\, dxdy = \int_0^{5/3} \int_y^{\frac{5-y}{2}} 1\, dxdy = \int_0^{5/3} \frac{5-y}{2} - y\, dy = \int_0^{5/3} \frac{5}{2} - \frac{3}{2} y\, dy$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{25}{6} - \frac{75}{36} = \frac{25 \cdot 6 - 25 \cdot 3}{36} = \frac{25 \cdot \cancel{3}}{12 \cdot \cancel{3}} = \frac{25}{12}.$$

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

TEOREMA DE STOKES: $\rightsquigarrow$ TEOREMA DE GREEN.

$$\int_S \text{rot} F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds \qquad \int_S \text{rot} F dS = \int_{\partial S} F \cdot dS.$$

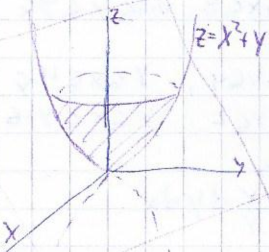
$\boxed{\text{INTEGRALES TRIPLES}}$.

① $\iiint_D xyz\, dxdydz$, $D = [0,1]^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{2} yz \Big|_0^1 dydz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} yz\, dydz = \int_0^1 \frac{1}{2} z \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 dz = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{4} \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

② $$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} 1 \cdot dzdydx = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2+y^2-x-y\, dyd\cancel{x} = \int_0^1 x^2y + \frac{y^3}{3} - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x} dx$$

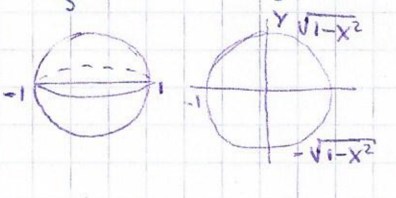


$$= \int_0^1 x^2 2x + \frac{(2x)^3}{3} - x(2x)\, dx = \int_0^1 2x^3 + \frac{8}{3} x^3 - 2x^2 dx$$

$$= \frac{2x^4}{4} + \frac{8}{3} \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \underline{\qquad}$$

Volumen de la esfera: $S = \overline{B((0,0),1)}$ en $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{Vol}(S) = \frac{4}{3}\pi$

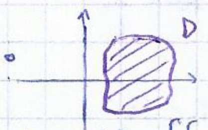
$$\iiint_S 1\, dxdydz = \frac{4}{3}\pi \qquad x^2+y^2+z^2 = 1$$



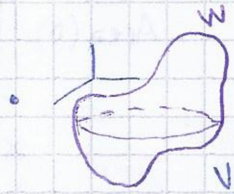
$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\, dzdydx.$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen}\, x\right) \cdot 6.$$

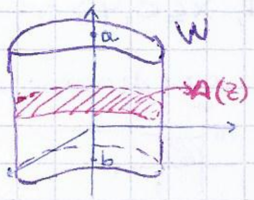
Principio de Cavallieri



$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\, dx\,dy$$



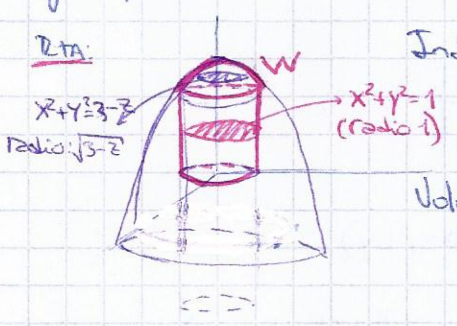
$$\text{Vol}(W) = \iiint_W 1\, dx\,dy\,dz.$$



$$\boxed{\text{Vol}(W) = \int_b^a A(z)\, dz}$$

① Calcular el volumen de sólido limitado por $z = -(x^2+y^2)+3$, $x^2+y^2=1$
$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 3-z \Rightarrow z<3.$
y el plano $z=0$.

Rta:



Inter: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=3-z \end{cases}$ $\quad 3-z=1 \quad \boxed{\begin{matrix} z=2 \\ x^2+y^2=1 \end{matrix}}$

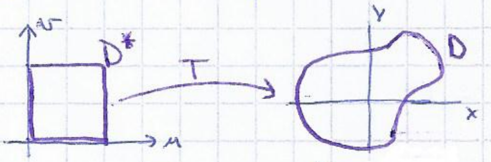
$$\text{Volumen}(W) = \int_0^3 A(z)\,dz = \int_0^2 \underbrace{A(z)}_{=\pi\cdot 1^2}dz + \int_2^3 A(z)\,dz$$

$$= \int_0^2 \pi\, dz + \int_2^3 \pi(3-z)\,dz = \pi\cdot 2 + \pi\left(3z - \frac{z^2}{2}\Big|_2^3\right)$$

-Práctica 9-

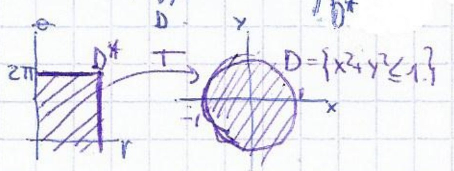
Teorema (cambio de variables)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(T(u,v))\cdot|JT(u,v)|\,du\,dv$$



$T: D^* \longrightarrow D$ biyectiva, C^1 y con inversa C^1

① $$\text{Área}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{D^*} 1\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$



$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Coordenadas polares: } T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) \\ |JT(r,\theta)| = r\end{matrix}}$$

② Sea $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\}$, Calcular el area de D.

Rta:

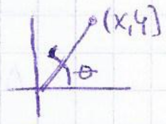
$$\text{Area}(D)=\frac{2\pi-\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$=\iint_D 1\,dxdy$$

$$\text{Area}(D)=\iint_D 1\,dxdy=\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} 1\cdot r\cdot dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}$$

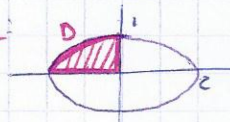
$x=r\cos\theta$ $\quad 1\leq r\leq\sqrt{2}$

$y=r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad 0\leq\theta\leq\pi$



③ Calcular $\iint_D e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\,dxdy$ donde $D=\{(x,y)/\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1,\ x\leq 0, y\geq 0\}$

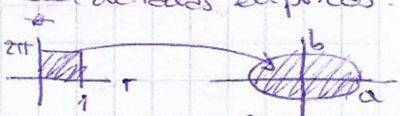
Rta:



$x=r\cos\theta$ $\quad 0\leq r\leq 1$

$y=r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad \frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$

coordenadas elípticas.



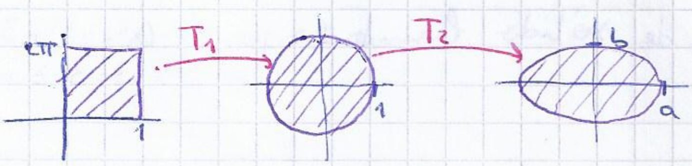
$0\leq r\leq 1$

$0\leq\theta\leq 2\pi$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ $\qquad |J|=abr$

$x=ar\cos\theta$

$y=br\,\text{sen}\,\theta$



$T_1(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ $\qquad \frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}\leq 1$

$x^2+y^2\leq 1$

$\tilde{x}=ax$ $\qquad T_2(x,y)=(ax,by)$

$\tilde{y}=by$

$$\iint_D e^{\frac{x^2}{4}+y^2}\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^1 \frac{e^{r^2}\cdot 2\cdot 1\cdot r}{e^{r^2}2r}\,dr\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\underbrace{\left(\int_0^1 e^{r^2}r\,dr\right)}_{\text{Sustitución}}d\theta$$

C.A:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=\frac{(2r\cos\theta)^2}{4}+(r\,\text{sen}\,\theta)^2 \qquad (e^{r^2})'=e^{r^2}\cdot 2r.$$

$$=\frac{\cancel{4}r^2\cos^2\theta}{\cancel{4}}+r^2\,\text{sen}^2\theta$$

$$=r^2(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)=r^2$$

Ejercicio 11 de la guía

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx}_{\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^{0} e^{-N^2}dx} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{0}^{N} e^{-N^2}dx} = (*)$$

$$\int_{-N}^{0} e^{-x^2}dx \qquad \int_{0}^{N} e^{-x^2}dx$$

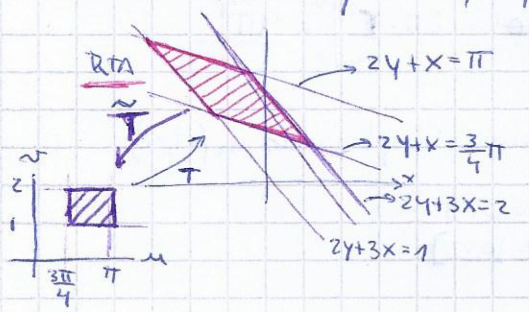
$$(*) = 2\underbrace{\lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{N} e^{-x^2}dx}_{I}$$

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right) = \iint_{x\geq 0,\,y\geq 0} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$x = r\cos\theta \quad r \geq 0$
$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 13:

④ Calcular $\iint_D (3x+2y)^2\cdot \mathrm{sen}(x+2y)\,dx\,dy$ donde D es la región limitada por las rectas $2y+3x=1$, $2y+3x=2$, $2y+x=\pi$, $2y+x=\frac{3}{4}\pi$



$$D = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \leq 2y+x \leq \pi \\ 1 \leq 2y+3x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 2y+x \\ v = 2y+3x \end{cases} \qquad \tilde{T}(x,y) = (2y+x,\ 2y+3x)$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{4} \leq u \leq \pi \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

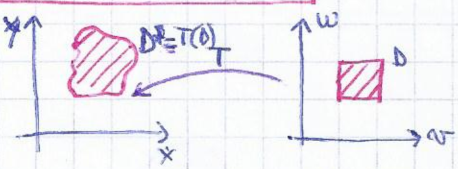
$T: \quad x = x(u,v)$
$\quad\ \ y = y(u,v)$

$$\iint_D (3x+2y)^2\,\mathrm{sen}(x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_1^2 v^2\,\mathrm{sen}(u)\,\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{JT}\,dv\,du = \ldots$$

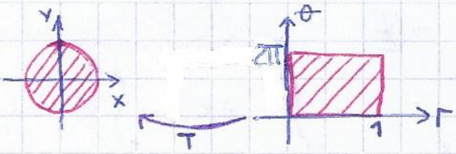
$$|J\tilde{T}| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\right| = 4 \quad ; \quad JT = (J\tilde{T})^{-1}$$

$\boxed{\text{CAMBIO DE VARIABLES}}$



$$\int_{D^*} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(T(w,v))\,|\det DT|\,dw\,dv$$

Ej:

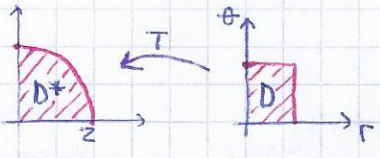


$T(r,\theta) = (\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\,\text{sen}\,\theta}_{y})$

$JDT = r$

① Calcular el área de $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$

RTA:



$\text{Área}(D^*) = \frac{\pi\cdot 4}{4} = \pi$ (por fórmula)

$x(r,\theta) = 2r\cos\theta$; $\theta\in[0,\pi/2]$

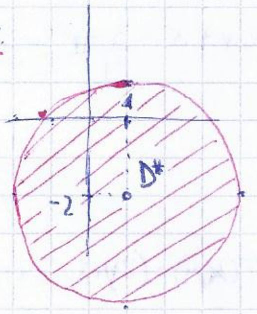
$y(r,\theta) = 2r\,\text{sen}\,\theta$; $r\in[0,1]$

$$\text{Área}(D^*) = \iint_{D^*} 1\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 4r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot 4\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = \pi$$

$$DT(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2r\cos\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta & 2r\,\text{sen}\,\theta \end{pmatrix} = 4r$$

② Área de $\{(x-1)^2+(y+2)^2\leq 9\} \rightsquigarrow A = 9\pi$

RTA:



$$\text{Area}(D^*) = \int_0^3\int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi$$

Tomo coordenadas polares desplazadas en $(1,-2)$

$x = 1 + r\cos\theta$; $r\in[0,3]$

$y = -2 + r\,\text{sen}\,\theta$; $\theta\in[0,2\pi]$.

③ Área de $\left\{\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9}\leq 1\right\}$

RTA:

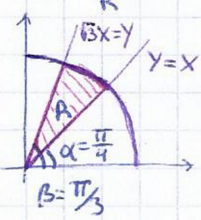
$T(r,\theta) \begin{cases} x = 1 + 2\pi\cos\theta \\ y = -5 + 3\pi\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$

$\det(DT(r,\theta)) = 2\cdot 3\cdot r$

$$\text{Área(elipse)} = \int_0^{\pi}\int_0^1 1\cdot 2\cdot 3\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\, 6\,\frac{1}{2} = 6\pi$$;

④ Calcular $\iint_R x^2+y^2\,dx\,dy$, $R = \{(x,y)/x^2+y^2\leq 1,\ y\leq\sqrt{3}x,\ y\geq x,\ x,y\geq 0\}$

RTA:



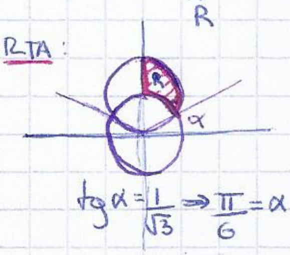
Coordenadas polares $x = r\cos\theta$ $r\in[0,1]$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$.

$$\Rightarrow \int_0^1\int_{\pi/4}^{\pi/3} r^2 r\,d\theta\,dr = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$$

⑤ Calcular $\iint_R x^2+y^2\,dxdy$

RTA:



$tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \alpha$

$x = r\cos\theta \quad \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

$y = r\,sen\,\theta \quad r \in [2, 4\,sen\,\theta]$ ⊛

Circunferencias: $x^2+y^2=2^2$

$x^2+(y-1)^2=2^2$

$\Rightarrow$ la región intersecciónes:

$x^2+y^2 = x^2+(y-2)^2 \Rightarrow 4y=4 \Rightarrow y=1$ y $x=\sqrt{3}$.

$$\iint_R x^2+y^2\,dxdy = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_2^{4sen\theta} r^2 r\,d\theta dr = \square$$

⊛ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2-4y+\cancel{4}=\cancel{4} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r^2=4 \\ r^2-4r\,sen\theta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r=2 \\ r=4\,sen\theta \end{cases}$

⑥ Volumen de la elipse: $\left\{\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{25}\leq 1\right\} = E$

RTA:

Coordenadas esféricas:

$T(r,\theta,\varphi) = (x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi))$

$x = 1+2r\cos\theta\,sen\varphi \quad ; \quad \theta\in[0,2\pi]$

$y = -2+3r\,sen\theta\,sen\varphi \quad \varphi\in[0,\pi]$

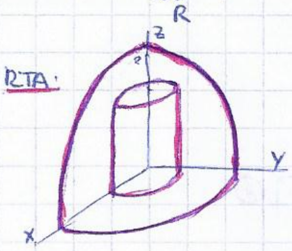
$z = 3+5r\cos\varphi \quad r\in[0,1]$

$\text{Det } DT = 2\cdot 3\cdot 5\cdot r^2\cdot sen\varphi$

$$\Rightarrow Vol(E) = \iiint_E 1\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 1\cdot 30\pi^2 sen\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta = \square$$

⑦ Calcular $\iiint_R xyz\,dxdydz$; $R=\{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2\leq 4;\ x^2+y^2\geq 1;\ x,y,z\geq 0\}$

<u>RTA:</u>



Uso coordenadas cilíndricas.

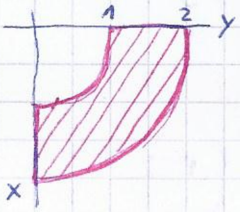
$T(r,\theta,z)$

$x=r\cos\theta$; $r\in[1,2]$

$y=r\,\text{sen}\,\theta$ $\theta\in[0,\pi/2]$

$z=\tilde{z}$ $z\in[0,\sqrt{4-r^2}]$

Vista desde arriba:



Esfera: $x^2+y^2+z^2=4$ (en cartesianas)

$r^2+\tilde{z}^2=4$ (en cilíndricas)

$$\Rightarrow \iiint_R xyz\,dxdydz=\int_1^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r.r.\cos\theta\, r\,\text{sen}\,\theta\,\tilde{z}\,d\tilde{z}\,d\theta\,dr$$

$$=\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^3.\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\tilde{z}\,d\tilde{z}\,d\theta\,dr.$$

-wachín!-