Exámenes Finales

Álgebra I

Matemática - Computación

Escrito y editado por: Gabriel R. (Estudiante de Lic. en Ciencias Matemáticas – FCEN UBA)

Website: FDXMATHS.COM   Facebook: FACEBOOK.COM/FDXMATHS

Introducción

En este documento te ofrezco algunos **finales** tomados en cuatrimestres anteriores en la materia de: **Álgebra I**, para las carreras de: Matemática y Computación. Esta materia se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

También te muestro los temas que entran para el final y la bibliografía recomendada por los docentes. Si buscás más info de la materia como fechas de exámenes, cursos y turnos disponibles, guías de ejercicios, etc. visitá la página oficial desde: cms.dm.uba.ar/academico/materias/

Podés encontrar más parciales en la fotocopiadora del Pabellón I (de ahí los saqué).

Programa de la materia

cms.dm.uba.ar/academico/lic/programas/algebraI

1) Operadores conjuntistas, unión, intersección, diferencia simétrica, complemento. Propiedades, ley de De Morgan. Producto cartesiano, n-uplas. Funciones, gráficos, biyecciones. Composición. Relaciones. Relaciones de equivalencia. Particiones. Conjuntos cociente.
2) Inducción completa. Definiciones inductivas.
3) Elementos de análisis combinatorio. Combinaciones, permutaciones. Combinaciones con repetición. Particiones.
4) Enteros, divisibilidad. Algoritmo de división. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Primos. Teorema fundamental de la aritmética. Factorización. Congruencias. Sistemas de numeración. Racionales e irracionales.
5) Números complejos. Forma trigonométrica. Teorema de De Moivre. Raíces n-ésimas.
6) Polinomios. Teorema del resto. Divisibilidad. Raíces, multiplicidad. Teorema de Gauss.

Régimen de Aprobación

Se deben aprobar los dos exámenes parciales. Para los alumnos que desaprueben alguno o ambos exámenes, habrá dos fechas de recuperación al finalizar el cuatrimestre. Se podrá rendir un solo parcial por fecha de recuperatorio, pudiendo los alumnos elegir cuál examen recuperar en cada fecha.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- ✓ Notas de las clases teóricas de Teresa Krick: Capítulo 1, Capítulo 2, Capítulo 3, Capítulo 4, Capítulo 5
- ✓ Notas de Ariel Pacetti y Matías Graña- PDF
- ✓ Conjuntos, relaciones y funciones, por Susana Puddu- PDF
- ✓ Números naturales, principio de inducción, por Susana Puddu- PDF
- ✓ Combinatoria, por Susana Puddu- PDF
- ✓ Números enteros, por Susana Puddu- PDF
- ✓ Números enteros, por Teresa Krick- PDF
- ✓ Números complejos, por Susana Puddu- PDF
- ✓ Polinomios, por Susana Puddu- PDF
- ✓ E. Gentile. Notas de Algebra (EUDEBA)
- ✓ E. Gentile. Estructuras algebraicas I. (Public. OEA)
- ✓ Birkhoff-Mc Lane. Algebra moderna.

Links de interés

Susana Puddu: mate.dm.uba.ar/~spuddu/Ppal.html

Teresa Krick: www.dm.uba.ar/materias/algebra_1/2004/1/

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA 1

1. *Sea* $A = \{a \in \mathbb{Z} : 5 \nmid a\}$ *y sea* $\mathcal{R}$ *la relación en* A *definida por*

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow 5 \mid 2a + 3b \quad y \quad 5 \nmid a + b$$

Determine si $\mathcal{R}$ *es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.*

2. *Pruebe que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *vale*

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} > \frac{n}{2}.$$

3. *Sea* $a \in \mathbb{Z}$ *tal que* $(a : 14) = 1$ *y sea* $d = (3a^4 - a^3 : a + 7)$. *Pruebe que:*

a) a *y* d *son coprimos,*

b) $d = 2$ *o* $d = 22$ *y encuentre los enteros para los que da* 2 *y los enteros para los que da* 22.

4. *Halle todos los* $z \in \mathbb{C}$ *que satisfacen simultaneamente las condiciones*

$$i|z|^4 + |z|^3 + (1 - 11i)|z|^2 + (-10 + 4i)|z| = 6 - 6i \quad y \quad \arg(z^4) = \frac{3\pi}{4}.$$

5. *Sea* $P = X^4 Q$ *con* $Q \in \mathbb{C}[X]$. *Determine para que valores de* $Q(0)$ *se tiene que* 0 *es raíz de multiplicidad exactamente* 8 *del polinomio* $X^5 P' + P^2$.

Justifique todas sus respuestas

Algebra I - Examen final - 17/10/01

Ejercicio 1. Se define la siguiente sucesión de polinomios:

$$\begin{cases} f_1 = X + 2 \\ f_{n+1} = X^2 + 4X + 4 + X.f_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, m_n denota la multiplicidad del -2 como **raíz de** f_n. Dar una fórmula general para m_n y probarla por inducción.

Ejercicio 2. Sea A el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \;/\; n \leq 100\}.$$

Se considera la relación $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}(A)$ en $\mathcal{P}(A)$ definida por

$X\mathcal{R}Y \iff$ la cantidad de elementos de X divide a la cantidad de elementos de Y

i) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.

ii) Calcular la cantidad de elementos $X \in \mathcal{P}(A)$ tales que $X\mathcal{R}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ejercicio 3. Sea w una raíz primitiva sexta de la unidad. Calcular los posibles valores de

$$w^{99^{171}} + 1.$$

Ejercicio 4. Dado el polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$

$$f = (x^3 - 3x + 2)^{120},$$

calcular la cantidad de divisores mónicos de f en $\mathbb{Q}[X]$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (13/12/02)

1.– Sea $f : G_{45} \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(z) = z^5$. Determinar si f es inyectiva y calcular su imagen.

2.– Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ **coprimos** tales que el polinomio

$$X^7 + 3X^6 - 2X^5 - X^4 + 2X^2 + bX + a$$

tenga (al menos) una raíz racional múltiple.

3.– ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 20 bolitas indistinguibles en 5 cajas con la condición de que en cada caja haya a lo sumo 9 bolitas?

4.– Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{15}\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{12}\right)^{3n+1}$$

5.– Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_0 = 1\,, \qquad a_{n+1} = 15\,a_n^2 - 2.\,7^{12n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \mathbb{Z}$ y $a_n \equiv 1\ (13)$

Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA : CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (23/12/02)

1.– Determinar cuántas funciones **biyectivas** $f : \{1,2,3,\ldots,16\} \longrightarrow \{1,2,3,\ldots,16\}$ satisfacen que $f(a) \equiv a\ (8)$ para todo $a \in \{1,2,3,\ldots,16\}$

2.– Sea $\sim$ la relación de equivalencia en G_8 definida por

$$z \sim w \quad \Leftrightarrow \quad z^6 = w^6$$

Hallar la clase de equivalencia de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i$

3.– Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que (al menos) una raíz cúbica de la unidad es raíz del polinomio

$$f = X^7 - X^4 + aX^3 - 2$$

Para cada valor de a hallado, encontrar todas las raíces de f en $\mathbb{C}$.

4.– Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28\ (105)$

5.– Sea $(fn)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = (X^2-1)^2\,, \qquad f_{n+1} = (X^2-1)f_n' - Xf_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, 1 es raíz **doble** de f_n

Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :   CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (27/12/02)

1.– Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 6 \qquad a_{n+1} = (4n+6)\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

2.– Sea $T : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ la función definida por $T(f) = X^2 f - (X+1)f'$. Probar que T es inyectiva pero no suryectiva.

3.– Sea a un entero **impar**. Probar que $(2^n + 7a \, : \, 2^{n+1} - 5a) = 1$ ó 19.

4.– Sean $f, g \in \mathbb{R}[X]$ tales que 5 es raíz doble de $f+g$ y simple de $f-g$. Probar que 5 es raíz simple de f y de g .

5.– Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)^{5n+1} = -1 \quad \text{y} \quad \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{5}\right)^{2n-1} = 1$$

Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta :   Carrera :

ALGEBRA – FINAL (14/2/03)

1.– Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 5 \qquad a_{n+1} = \frac{7+3^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

2.– Resolver la ecuación de congruencia

$$112\,x \equiv 4\ (10404)$$

3.– Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{C}$ definida por

$$z\,\mathcal{R}\,w \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}((z-w)\,i) \leq 0$$

Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

4.– Factorizar sobre $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$X^5 - 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 - 12X + 8$$

sabiendo que $1+i$ es raíz.

5.– Sea $z = \cos\frac{\pi}{19} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{19}$. Calcular el argumento de $z^{3^{55}}$

Sólo se considerarán las respuestas bien justificadas

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (28/2/03)

1.– Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{C}$ definida por

$$z\,\mathcal{R}\,w \quad \Leftrightarrow \quad z\,\overline{w} = |z\,w|$$

Probar que $\mathcal{R}$ es reflexiva y simétrica pero no transitiva.

2.– Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números enteros definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = 3\,a_n + 22^{24} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n \equiv 2\ (20)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

3.– ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 5 bolitas numeradas rojas y 10 bolitas numeradas verdes en 3 cajas distintas con la condición de que en alguna caja haya al menos 3 bolitas rojas?

4.– Hallar todas las raíces en $\mathbb{C}$ del polinomio

$$X^7 + X^6 - 2X^5 - 4X^4 - 4X^3 - 5X^2 - 5X - 2$$

5.– Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $3a + 7b = 26$ y $5a \equiv 1\ (13)$.

Sólo se considerarán las respuestas bien justificadas

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta :   Carrera :

ALGEBRA – FINAL (7/3/03)

1.– Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $2^{5n} \equiv 3n\ (16.17)$

2.– Probar que

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3i^2 + 3i + 2 = n^3 + n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

3.– Sea

$$S = \{f : \{1, 2, 3, \dots, 1531\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, 1531\} \,/\, f \text{ es biyectiva}\}$$

y sea $\sim$ la relación de equivalencia en S definida por

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(3) = g(3)$$

Para cada $h \in S$ tal que $h(3) = 2$, determinar cuántos elementos tiene la clase de equivalencia de h.

4.– Graficar en el plano complejo

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(iz) \geq \mathrm{Im}(2i - iz) \text{ y } |z + i| \leq 2\}$$

5.– Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y sea $g = X^2 f + (X - 2) f'$. Probar que si 2 es raíz doble de g entonces 2 es raíz doble de f.

Sólo se considerarán las respuestas bien justificadas

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :

CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (3/4/03)

1.– Sean A, B, C y D conjuntos. Probar que

$$(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (A \times D) - (B \times C)$$

2.– Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 5) = \frac{n(n+3)(2n-3)}{2}$

3.– Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{2177} \equiv a^5 \ (311)$

4.– Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ el polinomio $f = X^7 + 4X^6 + 4X^5 - X^2 - 4X - 4$. Hallar todas las raíces de f en $\mathbb{C}$ y para cada una de ellas indicar su multiplicidad.

5.– Sea $\sim$ la relación de equivalencia en G_{24} definida por

$$z \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad z^6 = w^6$$

Hallar la clase de equivalencia de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$

Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA : CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (15/5/03)

1.– Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = -1, \qquad a_{n+1} = 3a_n - (6n+3)\,3^n - 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = 2^n - n^2\,3^n$.

2.– Determinar cuántas funciones **inyectivas** $f : \{1,2,3,\ldots,50\} \longrightarrow \{1,2,3,\ldots,60\}$ satisfacen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

i) $f(i) \geq 30$ para todo $i \leq 25$

ii) $f(i) \leq 30$ para todo $i \geq 25$

3.– Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{182} - 26 : 130) = 13$. Calcular $(a^{25} - 39 : 2.5^3.13^2)$.

4.– Hallar todos los $z \in G_8$ tales que $\displaystyle\sum_{k=0}^{60} z^{2k} = z^{12}$.

5.– Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y sea $g = (X-2)^5\,f - (X-2)^6\,f'$. Probar que si 2 es raíz de f con multiplicidad 3 entonces 2 es raíz de g con multiplicidad 8.

Se considerarán sólo las respuestas bien justificadas.

Algebra I - Primer Cuatrimestre 2003

Final- 18/07/03

Apellido y nombre:

Número Libreta:

1	2	3	4	5	Calif.

(1) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\arg((1+i)^n) = \frac{3}{4}\pi \qquad \text{y} \qquad \arg((1-\sqrt{3}i)^{2n}) = \frac{4}{3}\pi$$

(2) Hallar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico y de grado 3 tal que el producto de todas sus raíces en $\mathbb{C}$ sea 2, la sumas de las raíces de f' sea $-\frac{2}{3}$ y $f(-1) = 1$. Factorizar f sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

(3) Probar que $25 | 6^n - 30n - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(4) Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$1 + z^4 + z^8 + z^{12} = 0$$

(5) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a^{37}}{13} + \dfrac{5a}{3} + \dfrac{11}{39} \in \mathbb{Z}$.

Justificar todas las respuestas

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :   CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (12/12/03)

1.– Sea $U = \{1, 2, 3, \ldots, 998, 999, 1000\}$ y sea $\Re$ la relación en $\mathcal{P}(U) - \emptyset$ definida por

$$A \,\Re\, B \iff \min(A) = \min(B) \quad \text{y} \quad \max(A) = \max(B),$$

(donde si X es un subconjunto de U, $\min(X)$ denota el menor elemento de X y $\max(X)$ el mayor).
Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia y calcular el cardinal de la clase de $A := \{100, 201\}$.
Pregunta Bonus: ¿ Cuántas clases de equivalencia tiene la relación $\Re$?

2.– Hallar el menor número natural a que satisface

$$\begin{cases} 7^{15} a \equiv -5 \pmod{12} \\ (a : 425) = 5. \end{cases}$$

3.– Determinar y representar graficamente todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican simultáneamente:

$$\arg\left(z^3\,(1+i)\,\overline{z}\right) \leq \frac{3}{4}\pi \quad \text{y} \quad 1 \leq |z - i| \leq 2.$$

4.– Sean $f \in \mathbb{C}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ raíz de f con multiplicidad 5. Se define la sucesión de polinomios $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$f_1 := f \quad \text{y} \quad f_{n+1} := (X - \alpha)^2 f_n + f^{n+1}\ , \ \forall\, n \geq 1.$$

Encontrar y probar una fórmula para la multiplicidad de α como raíz de f_n.

5.– Calcular el número de factores irreducibles de $X^8 - X^4 - 1$ en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA : CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (19/12/03)

1.– Sea $A := \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones f de A en A. Se define la siguiente relación $\Re$ en $\mathcal{F}$:

$$f \,\Re\, g \iff f(2) \le g(2).$$

(i) Estudiar si $\Re$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, y transitiva.
(ii) Sea $f : A \to A$ la función definida por $f(x) = r_8(7x)$ para $x \in A$. Calcular la cantidad de funciones $g : A \to A$ que verifican que $f \,\Re\, g$.

2.– Determinar todos los pares $a, b \in \mathbb{N}$ que verifican simultaneamente que

$$(a:b) = -2a + b \quad \text{y} \quad [a:b] = 83\,a.$$

3.– Sea w una raíz sexta primitiva de 1. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ que verifican que el producto

$$\prod_{i=0}^{n} w^{2i} = 1.$$

4.– Sea $f = X^2 + aX + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ las raíces de f. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$.

5.– Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ el polinomio

$$X^6 + 4X^5 + 7X^4 - a^3X^3 + 7X^2 + a^2X + 1$$

admite al -1 como raíz múltiple. Para cada valor de a hallado, factorizar el polinomio correspondiente en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :

CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (30/12/03)

1.– Sea $A := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones f de A en A. Se define la siguiente relación $\Re$ en $\mathcal{F}$:

$$f \,\Re\, g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq g(x),\ \forall x \in A.$$

(i) Probar que $\Re$ es una relación de orden, es decir: es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

(ii) Sea $f : A \to A$ la función definida por $f(x) = r_6(5\,x)$ para $x \in A$. Calcular la cantidad de funciones $g : A \to A$ que verifican que $f \,\Re\, g$.

2.– Determinar la cantidad de múltiplos de 18 que hay en la progresión aritmética

$$2,\ 16,\ 30,\ 44, \dots,\ 6988.$$

3.– Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada de números complejos que verifica las siguientes relaciones:

$$z_1 = 1, \qquad z_{n+1}^n = z_n.$$

Probar por inducción que $z_n \in G_{(n-1)!}$ (es decir z_n es una raíz de la unidad de orden $(n-1)!$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.– Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = X^6 - 6\,X^5 + 14\,X^4 - 8\,X^3 - 14\,X^2 + 10\,X + 7$$

sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 1 y cuyo producto es -1, que además son múltiples.

5.– Determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, el polinomio

$$X^n + 2\,X^5 + 3\,X^4 + 3\,X^3 + 3\,X^2 + 2\,X + 1$$

admite simultáneamente una raíz que es raíz cúbica de 1 y una raíz que es raíz quinta de 1.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta :   Carrera :

ALGEBRA – FINAL (20/02/04)

1.– Sea $\Re$ la relación en $\mathbb{Z}$ definida por:

$$a \,\Re\, b \iff \begin{cases} 8 \mid a^2 + b^2 & \text{si } a \text{ y } b \text{ son pares} \\ 8 \mid a^2 + 7b^2 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

(i) Probar que si a y b son de distinta paridad, entonces no pueden estar relacionados.
(ii) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.
(iii) Describir las clases de 0, de 1 y de 2.

2.– Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ que verifican que el resto de dividir a a por b es 24 y el resto de dividir a $3b$ por 72 es 48. Determinar $(a : b)$.

3.– Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva de 1 de orden 30 y sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva de 1 de orden 24. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales vale simultáneamente:

$$w^{7n-3} = 1 \qquad \text{y} \qquad z^{10n-6} = 1.$$

4.– Hallar la forma binomial de todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican simultáneamente las condiciones:

$$|z|^4 - 2i\,|z|^3 - 3\,|z|^2 + 10\,i\,|z| - 10 = 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg}(z^3) = \frac{3\pi}{2}.$$

5.– Sea la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios definida por:

$$f_1 := X^3 + X^2 - X - 1 \quad , \quad f_{n+1} := f_n^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinar y probar una fórmula para la escritura de f_n como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (05/03/04)

1.–

(i) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Se define la siguiente relación $\Re$ en $\mathbb{N}$:

$$n \,\Re\, m \iff f(n) \mid f(m).$$

Probar que $\Re$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir es una relación de orden).

(ii) Para la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) := 6\,n + 10$, determinar todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que $1 \,\Re\, m$.

2.– Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ que verifican que $4^n \equiv n \pmod 5$.

3.– Sea ω una raíz cúbica primitiva de 1. Determinar, según los valores de $n \in \mathbb{N}$, los valores de

$$1 + \frac{\omega - 1}{3}\,\omega^n + \frac{\overline{\omega} - 1}{3}\,\overline{\omega}^n.$$

4.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale que:

$$X^4 - X^2 + 1 \mid X^{24n+4} + X^{12n+6} + X^{12n+10} + 1.$$

5.– Sea $f = X^4 + 2\,X^3 - X^2 + 2\,X + 1$.

(i) Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f, entonces $1/\alpha$ también.

(ii) Factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA : CARRERA :

ALGEBRA – FINAL (19/03/04)

1.– Sea $\Re$ la relación en $A := \{2, 3, 4, 5, \ldots, 999, 1000\}$ definida por

$$n \Re m \iff (n : m) \neq 1.$$

(i) Estudiar si $\Re$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.
(ii) Determinar la cantidad de $m \in A$ que verifican que $12 \Re m$.

2.– Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $7\,a^9 \equiv 1 \pmod{10}$.

3.– Probar que

$$w = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,i$$

es una raíz de orden 16 de la unidad, que además es primitiva.

4.– Sea g un polinomio que verifica que $g(0) \neq 0$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por:

$$f_1 := X^2\, g(X) \quad , \quad f_{n+1} = (X\, f_n'(X))^2 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Determinar y probar una fórmula para la multiplicidad exacta de 0 como raíz de f_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5.– Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $X^4+3X^3+5X^2+4X+2$ sabiendo que tiene una raíz en común con el polinomio $X^6+3X^5+6X^4+7X^3+8X^2+6X+4$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA – FINAL (15/04/04)

1.– Sea $\Re$ la relación en G_{32} definida por
$$z \Re \omega \iff z\,\overline{\omega} \in G_{24}.$$
(i) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.
(ii) Determinar la cantidad de elementos de G_{32} relacionados con i.

2.– Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{7^{100}} \equiv 3 \pmod{10}$.

3.– Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de enteros definida por:
$$a_0 = 5,\ a_1 = 3 \quad \text{y} \quad \forall\, n \geq 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2.$$
Probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $(a_n : a_{n+1}) = 1$.

4.– Probar que si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz quinta de la unidad, $w \neq 1$, entonces $w + \overline{w}$ es raíz del polinomio $X^3 - 2X + 1$.

5.– Hallar todos los **enteros** a para los cuales el polinomio
$$X^6 + a\,X^5 + 2\,X^3 - 4\,a\,X + 1$$
tiene al menos una raíz racional, y para cada valor de a hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta :   Carrera :

ALGEBRA – FINAL (20/05/04)

1.– Sea $\Re$ la relación en $A := \{1, 2, 3, \ldots, 23, 24, 25\}$ definida por

$$n \,\Re\, m \iff n\,m \text{ es un cuadrado en } \mathbb{N}.$$

(i) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.
(ii) Determinar la partición del conjunto A definida por la relación $\Re$.

2.– Para qué valores de p primo se tiene que

$$2p \mid (15)^{p-1} + 205 \; ?$$

3.– Sea $a \in \mathbb{N}$ dado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de enteros definida por:

$$x_1 = a^2, \; x_2 = 3\,a^3 \quad \text{y} \quad \forall\, n \geq 3, \; x_n = a\,x_{n-1} + 5\,x_{n-2}^2.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $a^{n+1} \mid x_n$.

4.– Calcular el valor de

$$\sum_{k=0}^{33} \cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{34}\right).$$

5.– Determinar para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ la multiplicidad de -1 como raíz del polinomio $n\,X^{n+1} + (n+1)\,X^n + 1$.

Se considerarán sólo las respuestas debidamente justificadas.

1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

Turno: No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Final (16/7/04)

(1) Sean A, B, C suconjuntos finitos de un conjunto referencial V. Dar y demostrar una fórmula para el cardinal de $A \cap B \cap C$ en función de los cardinales de A, B y C y de sus uniones (es decir, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$).

(2) Determinar todos los $x, y \in \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente que

$$(x : y) = 8 \ \text{ y } \ 33\,x + 9\,y = 120.$$

(3) (a) Probar que $\frac{15^n+6}{7} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que $\frac{15^n+6}{7} \equiv r \ (44) \ \Leftrightarrow \ 15^n + 6 \equiv 7\,r \ (44)$ y $\frac{15^n+6}{7} \equiv r \ (14) \ \Leftrightarrow \ 15^n + 6 \equiv 7r \ (98)$.

(c) Calcular el resto de dividir por 44 a $\frac{15^{21}+6}{7}$.

(4) Sean $n \geq 3$ y $z \in G_{2^n}$ una raíz de orden 2^n de 1. Calcular los posibles valores de

$$(z^2 - 1) \sum_{i=0}^{2^{n-2}-1} z^{2i}$$

según si z es primitiva o no.

(5) Sean $a \neq b$ en $\mathbb{C}$. Probar que el único polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ de grado menor o igual que 2 que satisface que $f(a) = 1$, $f'(a) = 0$ y $f(b) = 0$ es el polinomio

$$f = \frac{(x-b)(2a-b-x)}{(a-b)^2},$$

y determinar todos los polinomios $g \in \mathbb{C}[x]$ de grado menor o igual que 3 que satisfacen que $g(0) = 1, g'(0) = 0, g(1) = 0$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA 1 – FINAL (03/08/04)

(1) Se define en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ la siguiente relación:

$$a \preccurlyeq b \iff \exists\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tal que } b = a + 4n.$$

Probar que $\preccurlyeq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir es una relación de orden) y determinar todos los $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $1 \preccurlyeq b$.

(2) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios definida por:

$f_1 := x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $f_2 := x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$ y $f_n = (x-1)f_{n-1} - x\, f_{n-2}$, $\forall\, n \geq 3$.

Determinar la multiplicidad exacta de 1 como raíz de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Probar que si $n \equiv m \pmod{20}$ entonces $n^n \equiv m^m \pmod 5$ y calcular el resto de dividir por 5 a $\sum_{n=1}^{100} n^n$.

(4) Sean z una raíz primitiva de orden 16 de 1 y w una raíz primitiva de orden 42 de 1. Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen simultáneamente que $z^{7n} = z^{4n}$ y $w^{3n} = \overline{w}^{18}$.

(5) Para $g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$, se define $\overline{g} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i x^i$. Se puede probar que si $f \in \mathbb{R}[x]$ y $g \in \mathbb{C}[x]$, entonces $g \mid f \iff \bar{g} \mid f$.

Sabiendo eso, probar que si $f \in \mathbb{R}[x]$ es divisible por $x^3 - 2x + i$ en $\mathbb{C}[x]$, entonces es divisible por $(x^3 - 2x + i)(x^3 - 2x - i)$ en $\mathbb{R}[x]$, pero que si $f \in \mathbb{R}[x]$ es divisible por $x^3 + i\,x^2 + x + i$, eso no implica que sea divisible por $(x^3 + i\,x^2 + x + i)(x^3 - i\,x^2 + x - i)$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Final (13/08/04)

(1) Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\Re$ la relación en X definida por:

$$(n_1, m_1) \ \Re \ (n_2, m_2) \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 \,|\, n_2 \quad \text{y} \quad m_2 \,|\, m_1.$$

- Probar que $\Re$ es una relación de orden (es decir es reflexiva, antisimétrica y transitiva).
- Calcular la cantidad de elementos $(n, m) \in X$ que satisfacen simultáneamente que

$$(\,2\,,\,2^5 3^{18}\,) \ \Re \ (n, m) \quad \text{y} \quad (n, m) \ \Re \ (\,2^{10}\,,\,6\,).$$

(2) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(42^{n+1} + 7n : 490) = 35$.

(3) Sea z una raíz **primitiva** de orden 16 de 1. Probar que $z^n = i$ implica que $4 \,|\, n$, y mostrar (con un contraejemplo) que la recíproca no es cierta: es decir mostrar que existe una raíz primitiva ω de orden 16 de 1 y un n divisible por 4 tales que $\omega^n \neq i$.

(4) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida recursivamente como

$$f_1 = x^2 - 3x + 2, \;\; f_2 = x^2 - 5x + 4 \;\text{y}\; f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Encontrar para cada $n \in \mathbb{N}$ quiénes son las raíces de f_n y probarlo.

(5) Hallar todos los polinomios de la forma

$$x^4 + i\,x^3 + 2\,x^2 + ai\,x + b,$$

con $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos y no nulos, que admiten al menos una raíz racional. Para todos los valores hallados, factorizar el polinomio obtenido.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Final (06/09/04)

(1) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea la relación $\Re_n$ en $\mathbb{Z}$ definida inductivamente por:

$$a \,\Re_0\, b \iff a = b \text{ ó } a = b+1$$
$$a \,\Re_{n+1}\, b \iff \exists\, c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a \,\Re_n\, c \text{ y } c \,\Re_n\, b.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \,\Re_n\, b \iff \exists\, k$, $0 \leq k \leq 2^n$, tal que $a = b + k$.

(2) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(7\,a^{103} + 18 : 132) = 33$. Determinar el resto de dividir a a por 66.

(3) Sea $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq -1$, una raíz quinta de -1. Probar que $z = \omega^{24} + \omega^{102} + \omega^{39}$ es una raíz quinta primitiva de 1.

(4)
- Sea $n \in \mathbb{N}$ un número impar. Probar que $(x^{2n}-1)(x-1)$ es divisible por $(x^n-1)(x^2-1)$.
- Determinar el polinomio mónico en $\mathbb{Z}[x]$ cuyas raíces son las raíces primitivas de orden 10 de la unidad, todas con multiplicidad 1.

(5) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio $x^n - 11\,x + 10$ admite al menos una raíz múltiple. Para cada valor hallado, determinar la cantidad de raíces distintas del polinomio y su multiplicidad.

Justifique todas sus respuestas.

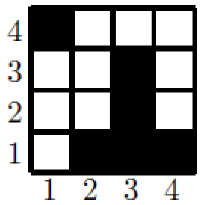
1	2	3	4	5

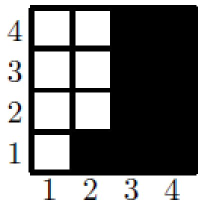
APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :   CARRERA :

ALGEBRA 1 – FINAL (14/10/04)

(1) Se tiene un tablero de 4×4 casillas. Una *coloración* del tablero es una asignación de un color, blanco o negro, para cada casilla, como en el dibujo (los números indican las coordenadas de las casillas). Cada segundo, una computadora elige al azar las coordenadas (x, y) de una casilla, mira

$\alpha =$ 

$\beta =$ 

el color de ésta, y colorea de ese color a todas las casillas que están arriba y a la derecha de (x, y); es decir, a las casillas de coordenadas (a, b) tales que $a \geq x$ y $b \geq y$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las coloraciones del tablero ($\mathcal{C}$ tiene 2^{16} elementos). Se define en $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ la relación $\mathcal{R}$ por $\alpha \mathcal{R} \beta$ si de α se puede llegar a β en alguna cantidad de pasos. En el dibujo, $\alpha \mathcal{R} \beta$, ya que eligiendo $(1, 3)$ y luego $(3, 2)$, se pasa de α a β.

Probar que $\mathcal{R}$ no es una relación de orden ni de equivalencia.

(2) Se define la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y $a_{n+2} = a_n + 4\sqrt{a_{n+1}}$ si $n \geq 0$. Encontrar una fórmula cerrada para a_n y probarla.

(3) Encontrar todos los pares $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $(24^{10})^x \cdot (160^9)^y$ es divisible por 2^{360} y no por 2^{361}.

(4) Sea $z = \sqrt{3} + i$ y sea w una raíz primitiva de orden 35 de la unidad. Encontrar todos los $t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} 2\, z^{t^2} = 2^{t^2}\, z \\ w^{t^{12}} = \overline{w}^{2t-2} \end{cases}$$

(5) (a) Encontrar un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ de grado < 3 tal que

$$\begin{cases} r_{(x-1)(x-2)}(f) = 5x - 9, \\ r_{(x+1)}(f) = -8. \end{cases}$$

(b) Se tienen números distintos $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_m$, y dos polinomios $r_1, r_2 \in \mathbb{R}[x]$ tales que $\operatorname{gr}(r_1) < n$, $\operatorname{gr}(r_2) < m$. Se definen

$$p_1 = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n) \quad \text{ y } \quad p_2 = (x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdots (x - b_m).$$

Probar que existe un único polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ de grado $< (n + m)$ tal que

$$\begin{cases} r_{p_1}(f) = r_1, \\ r_{p_2}(f) = r_2. \end{cases}$$

Justifique todas sus respuestas.

Algebra I
Examen Final (10-12-04)

Nombre y apellido:

Turno: **Carrera:**

1	2	3	4	5

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea A un conjunto de n elementos. Determinar el número de relaciones de equivalencia en A que admiten a lo sumo 2 clases de equivalencia.

2. Probar que
$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} > \frac{n}{2}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $n = 2^{25}3^{100}5^{51}7^{65}11^2$. Calcular el número de divisores positivos d de n que verifican simultáneamente las siguientes condiciones:
   (a) d es un cuadrado perfecto.
   (b) $40 \mid d$.
   (c) $(d : 3^{300}7^5 11) = 3^{60}7^5$.

4. Sea $g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $f = X^4 g$. Hallar los posibles valores del término constante de g, sabiendo que 0 es raíz de multiplicidad 8 del polinomio $X^5 f' + f^2$.

5. Sea z una raíz 18-ésima primitiva de 1. Caracterizar los $n \in \mathbb{N}$ tales que $z^{4n} \in G_{12}$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Examen Final (17-12-04)

Nombre y apellido:

Turno: **Carrera:**

1	2	3	4	5

1. Si $n \in \mathbb{N}$, probar que en el conjunto $\{n, n+1, \cdots, 2n\}$ hay un cuadrado perfecto.

2. Sean $A = \{1, 2, \cdots, 15\}$ y $B = \{1, 2, \cdots, 27\}$. Calcular el número de funciones estrictamente crecientes $f : A \to B$ tales que $f(2) > 5$.

   Aclaración: f se dice estrictamente creciente si $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$.

3. Demostrar que existen infinitos pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $x + y = 196$ y $(x : y) = 7$.

4. Sea ω una raíz octava primitiva de 1. Caracterizar los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$\prod_{i=0}^{n} \omega^{12i} = 1.$$

5. Si $g \in \mathbb{R}[X]$, determinar los posibles valores de $(g + X : Xg + 2)$. Para cada uno de los casos hallados, exhibir un polinomio g que lo satisfaga.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Examen Final (28-12-04)

Nombre y apellido:

Turno: **Carrera:**

1	2	3	4	5

1. Hallar (y probar) una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ definida por las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} a_5 = 22 \\ a_{n+1} = a_n + na_1 \quad \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

2. Probar que $9^n \geq 5^n + n4^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar que todo número natural n se expresa unívocamente en la forma

$$n = a^2 b,$$

donde $a, b \in \mathbb{N}$ y b es libre de cuadrados.

<u>Aclaración</u>: Un entero se dice libre de cuadrados si 1 es el único cuadrado perfecto que lo divide.

4. Sea w una raíz cúbica de -1, y sea $f = X^{121} - X^{108} - X^{74} + X^{25} - 1$. Si $w \neq -1$, probar que $f(w)$ es una raíz cúbica primitiva de 1.

5. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio de grado 3 con exactamente un coeficiente par. Probar que f admite alguna raíz $u \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Nombre y Apellido:
Número de libreta:

Algebra I - 2005
Examen final - 26/7/05

(1) Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado $n \geq 2$. Probar que si f' divide a f entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $f(x) = \alpha(x-\beta)^n$.

(2) Sea $n \in \mathbb{N}$ un número impar.

(a) Probar que si $\omega \in G_n$ es una raíz primitiva de orden n entonces $-\omega$ es una raíz primitiva de la unidad de orden $2n$.

(b) Probar que todas las raíces primitivas de la unidad de orden $2n$ son de esta forma.

(3) Sea $A = \{a \in \mathbb{Z} \,/\, (a : 11) = 1\}$ y sea $\simeq$ la relación en A definida por

$$a \simeq b \iff a^2 b^8 \equiv 1 \ (11)$$

(a) Probar que $\simeq$ es una relación de equivalencia.

(b) Hallar todos los $a \in A$ tales que $a \simeq 6^{43}$.

(4) Sea $\{c_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión definida recursivamente como sigue:

$$c_0 = 1 \qquad\qquad c_n = 1 - \sum_{l=0}^{n-1} c_l \binom{n+1}{n-l}$$

Probar que $\forall n \geq 0$, $c_n = (-1)^n$.

(5) ¿De cuántas maneras pueden colocarse 65 discos numerados en tres pilas si la última pila no puede quedar vacía, la segunda debe tener al menos 44 discos y la primera debe tener exactamente 15 discos?

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA I – FINAL (2/8/05)

1. Sea $z \in G_{11}$, $z \neq 1$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $z^{2^n} = \overline{z}^5$.

2. Un señor tiene a palomas y q jaulas. Determinar a y q sabiendo que $a \geq 100$, $q \leq 50$ y que si colocara $17a$ palomas en $8q$ jaulas poniendo 7 palomas por jaula, le sobrarían dos palomas.

3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 16 bolitas iguales en 3 cajas distintas si en cada caja debe haber por lo menos dos bolitas y a lo sumo seis?

4. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ definida por

$$f_0 = X - \frac{1}{2}, \qquad f_1 = X^2 - \frac{2}{3}X + 5, \qquad f_{n+1} = \frac{1}{n+1}X^2 f_n{}' + 3 f_{n-1}$$

Probar que, para todo $n \geq 0$, f_n es un polinomio mónico de grado $n+1$.

5. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ tales que $a+b+c = -1$, $a^2+b^2+c^2 = 3$ y $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{-1}{10}$.
i) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado 3 cuyas raíces sean a, b y c.
ii) Factorizar el polinomio f hallado en i) en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :   CARRERA :

ALGEBRA I – FINAL (12/8/05)

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $7 \mid 2^n + 5$ y $11 \mid 2^n + 1$. Hallar el resto de dividir a n por 30.

2. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} n \leq 100\}$ y sea $U = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \leq 20\}$. Sea $\simeq$ la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(A)$ definida por

$$A \simeq B \iff A - U = B - U$$

Determinar cuántos elementos tiene la clase de equivalencia de $B = \{n \in X \,/\, 3 \mid n\}$

3. Probar que $G_{4+3^{38}} \cap G_{195} = G_{13}$.

4. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $f = X^{10} - 5i\, X^5 - 4 \in \mathbb{C}[X]$.

5. Sea la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios definida por :

$$f_1 = X^3 + X^2 - X - 1 \quad , \quad f_{n+1} = (X+1)\, f_n^2 + (X^4 + X^3)^{n+2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, -1 es raíz de f_n con multiplicidad igual a $n+1$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

Apellido y nombre:

No. de libreta : Carrera :

ALGEBRA I – FINAL (9/12/05)

1. Sea A el conjunto de todas las permutaciones de 11112223368 y sea $\simeq$ la relación de equivalencia en A definida por

$\sigma \simeq \tau \iff$ los lugares donde están ubicados los unos en σ y en τ son los mismos

(Por ejemplo, $12336118221 \simeq 13862113281$ pero $12336118221 \not\simeq 31862113281$)

i) Determinar cuántos $\sigma \in A$ satisfacen $\sigma \simeq 28162113321$

ii) Determinar cuántas clases de equivalencia hay

2. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{i+2} \geq \frac{n}{n+2}$ para todo $n \geq 3$

3. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $2a + 3b = 75$ y $(a : b) = 5$

4. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = \sqrt{5}$ y $z^3 - 2z + 16 = 3\overline{z}$

5. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $(a : b) = 1$. Probar que

$$f = X^{10} + 5\,X^6 - 2\,X^5 - 10\,X^3 + 10b\,X + a$$

no tiene ninguna raíz múltiple en $\mathbb{Q}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :   CARRERA :

ALGEBRA I – FINAL (16/12/05)

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = 2X - 13, \quad f_2 = 2X^2 + 5X - 11, \quad f_{n+2} = X^2 f'_{n+1} - 18X\, f_n$$

Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es un polinomio de grado n y su coeficiente principal es igual a 2(n-1)!

2. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 2 \leq n \leq 101\}$.
Determinar cuántas funciones **biyectivas** $f : A \longrightarrow A$ satisfacen que $f(i) = i + 1$ para todo i par y $f(i) > i$ para todo $i \leq 20$

3. Hallar **todos** los $n \in \mathbb{N}$ tales que $286 \mid 11^n + 13n + 8$

4. Hallar el módulo y el argumento de cada uno de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $(z^4 - 1)^3 = 1$.

5. Probar que $f = X^{1833} + X^{1531} - X^{174} + 2X^{137} + 2X^4 - X^2 + 1$ es divisible por $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA :   CARRERA :

ALGEBRA I – FINAL (27/12/05)

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de números enteros definida por

$$a_0 = -1, \qquad a_n = 2a_{n-1} + 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Hallar una fórmula para el término general a_n y probarla por inducción.

2. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 10 bolitas rojas, 6 bolitas negras y 16 bolitas blancas en tres cajas distintas de manera que en cada caja el número de bolitas de cada color sea par?

3. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $3a \equiv 7\ (23)$ y $(2a+5 : 13a-2) \neq 1$.

4. Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular

$$w^{2^{30}} + w^{2^{31}} + w^{2^{32}} + w^{2^{33}} + \cdots + w^{2^{39}}$$

5. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 8. Factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que satisface:

- f tiene exactamente 5 raíces distintas en $\mathbb{C}$
- $1+i$ y $2-\sqrt{3}$ son raíces simples de f
- $f(2) = 0$ y $f(0) = 4$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

FINAL DE ALGEBRA 1 (28/03/2006)

Ejercicio 1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números enteros definida por*

$$a_1 := 14, \quad a_2 := 36 \quad y \quad a_n = -4a_{n-2} + 4a_{n-1}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Pruebe que $a_n = (2n+5)2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. *De cuantas maneras se pueden ubicar 15 bolillas indistinguibles en 7 cajas numeradas con la condición de que a lo sumo una caja quede vacía?*

Ejercicio 3. *Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^{13} = 1$. Pruebe que $(w^{26} + w^{20})(w^{32} - 1)$ es imaginario puro.*

Ejercicio 4. *Encuentre el resto de la división de P por $X^3 - X^2 - X + 1$, sabiendo que $P \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio que satisface $P(1) = 2$, $P(-1) = 0$ y $P'(1) = 1$.*

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

FINAL DE ALGEBRA 1 (21/04/2006)

Ejercicio 1. *Se define la relación* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *por*

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \bigcap B \subseteq \mathbb{N}.$$

Clasificarla en reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Ejercicio 2. *Determinar cuantos enteros* a *tales que* $0 \leq a \leq 7^{100}$ *satisfacen que* $49|a$ *y que el desarrollo en base 7 de* a *tiene por lo menos tres dígitos iguales a 4.*

Ejercicio 3. *Hallar todos los* $z \in \mathbb{C}$ *tales que* $|iz - 1| = 2$ *y* $(z + i)^6 = (\overline{z} - i)^6$

Ejercicio 4. *Factorizar en* $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ *y* $\mathbb{C}[X]$ *el polinomio*

$$X^5 - X^4 + 4X^3 - 7X^2 - 5X - 10,$$

sabiendo que tiene una raíz en $\mathbb{C}$ *cuya parte real es cero.*

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
No DE LIBRETA:

ÁLGEBRA I - EXAMEN FINAL
(25/07/2008)

1. Decidir si las siguientes afirmaciones en $\mathbb{Z}$ son verdaderas o falsas. Probarlas o dar contraejemplos según corresponda.

   a) Si $a|bc$ y $(b:c)=1$ entonces $a|b$ ó $a|c$.

   b) Si $a|b+c$ y $(a:c)\neq 1$ entonces $(a:b)\neq 1$.

   c) Si $(a:b)=(a:2b+3a)$ entonces $2\nmid a$.

   d) Si $2\nmid a$ entonces $(a:b)=(a:2b+3a)$.

2. Sean $p\in\mathbb{N}$ un número primo y $a,b\in\mathbb{Z}$ tales que $a\equiv b \pmod{p}$. Probar que para todo $n\in\mathbb{N}_0$ vale que $a^{p^n}\equiv b^{p^n} \pmod{p^{n+1}}$.

3. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{N}_0$. Probar que el polinomio $x^{4a}+x^{4b+2}+x^{4c+7}+x^{4d+9}$ es divisible por x^3+x^2+x+1 en $\mathbb{Q}[x]$.

4. Hallar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $11\cdot 17\mid 3^n+2$.

5. Sea $f\in\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $f=x^4+x^3+x^2+x+1$.

   a) Probar que f es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

   b) Para cada número natural n calcular $(f:x^n-1)$.

   c) Probar que si $p\in\mathbb{Q}[x]$ tiene como raíz a alguna raíz quinta primitiva de la unidad, entonces todas las raíces quintas primitivas de la unidad son raíces de p.

Justifique debidamente todas sus respuestas

1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
No DE LIBRETA:

ÁLGEBRA I - EXAMEN FINAL
(12/08/2008)

1. Probar que $\forall n \geq 4$, $\sum_{i=1}^{n} i! \geq 3 + 10 \cdot 3^{n-3}$.

2. Se tienen m rectas paralelas en el plano y en cada una de ellas se eligen n puntos.

   (a) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos se pueden formar con estos puntos?

   (b) ¿Cuántos de esos subconjuntos contienen como máximo dos puntos en cada recta?

3. (a) Encontrar todos los $m \in \mathbb{Z}$ tales que $m^2 \equiv 1 \pmod{97}$.

   (b) Probar que para todo $m \in \mathbb{Z}$, m^{48} es congruente a 0, 1 ó 96 módulo 97.

4. (a) Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ no nulos, $h = (f : g)$ su máximo común divisor y $\alpha \in \mathbb{C}$. Probar que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ si y solo si $h(\alpha) = 0$.

   (b) Dado $f \in \mathbb{C}[x]$, probar que $(f : f') = 1$ si y solo si f no tiene raíces múltiples

   (c) Probar que para cualquier $f \in \mathbb{C}[x]$ no nulo, el grado de $(f : (f')^2)$ nunca es igual a 1.

5. ¿Para qué valor de $n \in \mathbb{N}$ los números complejos $z_1 = \frac{4+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-2}{2}i$ y $z_2 = 2$ son los vértices de un n-ágono regular centrado en $2 - i$? Calcular los otros $n - 2$ vértices.

Justifique debidamente todas sus respuestas

1	2	3	4	5

Calificación

Apellido y nombre:
No de Libreta:

Álgebra I - Examen final
(8/09/2008)

1. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

   (a) Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (en caso de ser verdadera demostrarla y si no, dar un contraejemplo):

   "Si $\mathcal{R}$ es simétrica, transitiva y además satisface que para todo elemento $a \in \mathcal{A}$ existe un elemento $b \in \mathcal{A}$ tal que $a\mathcal{R}b$, entonces $\mathcal{R}$ es de equivalencia".

   (b) En cada uno de los siguientes dos casos, dar un ejemplo de un conjunto $\mathcal{A}$ y una relación $\mathcal{R}$ que sea:

   - Reflexiva, antisimétrica y transitiva.
   - Reflexiva, antisimétrica y no transitiva.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\Sigma = \{$tiras de 0 y 1 de longitud $n\}$. Si se eligen $A, B \in \Sigma$ al azar, ¿cuál es la probabilidad de que A y B coincidan en exactamente k lugares, para cada k entre 0 y n?

3. Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio.

   (a) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Z}$ que verifica $f(a) \equiv 0 \pmod p$. Probar que existe $q \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(x) = (x-a)q(x) + m$, con $m \equiv 0 \pmod p$.

   (b) Si f es de grado 2 y $p \in \mathbb{N}$ es primo, probar que existen a lo sumo dos números $0 \leq i, j \leq p-1$ tales que $f(i) \equiv 0 \pmod p$ y $f(j) \equiv 0 \pmod p$.

   (c) Construir un polinomio de grado 2 que tenga al menos 3 raíces distintas módulo 6 (con lo cual el resultado probado en el inciso anterior vale sólo cuando el módulo es primo).

4. Hallar y dibujar los conjuntos

$$S = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 \leq arg(z^3) \leq \pi\}, \qquad T = \{z \in S \,:\, z^{10} = -1\}$$

5. Para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, hallar $\operatorname{mcd}(n^2-1, 3n^3+4n^2+2n)$.

Justifique debidamente todas sus respuestas

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA 1 (ABRIL 2009)

1. *Sea* $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ *una función que satisface* $f(x+y) = f(x) + f(y) + 1$.

a) *Pruebe que* $f(n) = nf(1) + n - 1$.

b) *Encuentre los valores de* $f(1)$ *para los que* f *es inyectiva.*

2. *Encuentre el resto de dividir* 2^{221} *por* 1035.

3. *Definimos la relación* $\mathcal{R} \subseteq P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R})$ *por*

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap B \subseteq \mathbb{N}$$

Clasifiquela en reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica.

4. *Encuentre todos los* $z \in \mathbb{C}$ *que satisfacen*

$$|z|^3 + 4|z| = 3|\overline{z}|^2 + 12 \quad y \quad 2z^5 = (1 - \sqrt{3}i)\overline{z}^5.$$

5. *Factorize el polinomio*

$$X^9 - 2X^6 - (2+i)X^3 - 3(1-i) \in \mathbb{C}[X]$$

sabiendo que tiene una raíz real.

Justifique todas sus respuestas

1	2	3	4	5

Calificación

Apellido y nombre:
N° de Libreta:

Álgebra I - Final
04/08/2009

1. Sea $R \subset X \times X$ una relación tal que

   - $\forall x, y \in X$, $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,
   - $\forall x, y, z \in X$, $(x, y) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ ó $(z, y) \in R$.

   Probar que la relación $S \subset X \times X$ definida por $(x, y) \in S$ si y solo si $(x, y) \notin R$ e $(y, x) \notin R$ es de equivalencia.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar la cantidad de funciones **inyectivas** que pueden definirse $f : \{1, 2, \ldots, 4n\} \to \{1, 2, \ldots, 4n\}$ de manera que $f(k) = k+1$ para todo k impar y $f(k) > k$ para todo $k \leq 2n$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. Probar que $([a : b] : a + b) = (a : b)$.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $w \in G_n$. Probar que son equivalentes:

   - $\min\{j \in \mathbb{N} \mid w^j = 1\} = n$,
   - $w = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ con $k \in \mathbb{N}$, $(k : n) = 1$.

5. Sean f, g polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ tales que f es irreducible. Probar que

$$f^2 \mid g \iff f \mid g \text{ y } f \mid g'.$$

Justificar debidamente todas las respuestas

1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
N° DE LIBRETA:
CARRERA:

ÁLGEBRA I - FINAL

14/08/2009

1. Probar que dados $a, b \in \mathbb{N}$, existen únicos $q, r \in \mathbb{N}_0$ tales que $a = q \cdot b + r$ y $0 \leq r < b$.

2. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

   a) Si $f \in \mathbb{Q}[X]$ no tiene raíces reales, entonces f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

   b) Si $f, g, h \in \mathbb{Q}[X]$, $f \mid g\,h$ y $(f : g) = 1$, entonces $f \mid h$.

   c) Si $f, g, h \in \mathbb{Q}[X]$, $f \mid h$ y $g \mid h$, entonces $fg \mid h$.

3. Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ se define $a_{n,m} \in \mathbb{N}$ como sigue:

   - $a_{0,m} = 2^m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.
   - para $n \in \mathbb{N}_0$, $a_{n+1,m} = a_{n,m} + a_{n,m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

   Hallar una fórmula para $a_{n,m}$ en función de $n, m \in \mathbb{N}_0$ y probarla por inducción.

4. *a*) Sea A un conjunto de n elementos. ¿Cuántas relaciones $\mathcal{R} \subset A \times A$ hay que sean simétricas? ¿Cuántas que sean a la vez reflexivas y antisimétricas?

   b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$. ¿Cuántas funciones $f : \{1, \ldots n\} \to \{1, \ldots, m\}$ hay que sean crecientes? ¿Cuántas que sean estrictamente crecientes?

5. Sea $n \in \mathbb{N}$ par y sean $w, z \in G_n$ primitivas. Probar que $(w + z)^{\frac{n}{2}} \in \mathbb{R}$.

Justificar debidamente todas las respuestas

1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
N° DE LIBRETA:
CARRERA:

ÁLGEBRA I - FINAL
25/08/2009

1. Probar que para todo par de números $n, m \in \mathbb{N}$ coprimos existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que
$$\frac{1}{nm} = \frac{s}{n} + \frac{t}{m}.$$

2. Sea $f = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ con $a_d \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Probar que si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ es raíz de f, con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ coprimos, entonces $\alpha \mid a_0$ y $\beta \mid a_d$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$.
   a) Probar que $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$ para todo $1 \leq m \leq n$.
   b) Enunciar y probar la fórmula del binomio de Newton.
   c) Calcular $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$.

4. En un tren con 3 vagones, cada uno de los cuales tiene una catidad a de asientos, viajan p personas. ¿De cuántas formas distintas pueden ubicarse de manera que
   a) no haya asientos vacíos?
   b) haya a lo sumo 2 asientos vacíos y en los vagones con asientos vacíos no haya personas paradas?

   (Para las personas que viajan paradas, solo importa en qué vagón están.)

5. Sean $n, m \in \mathbb{N}$.
   a) Probar que $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$. Deducir que si $(n:m) = 1$, entonces $G_n \cap G_m = \{1\}$.
   b) Sea $G_n \cdot G_m = \{w \cdot z \in \mathbb{C} \mid w \in G_n,\ z \in G_m\}$. Probar que si $(n:m) = 1$, entonces $G_n \cdot G_m = G_{nm}$.

Justificar debidamente todas las respuestas

1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
N° DE LIBRETA:
CARRERA:

ÁLGEBRA I - FINAL

29/09/2009

1. Probar que si $p \in \mathbb{N}$ es primo y $a \in \mathbb{Z}$ no es múltiplo de p, entonces
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2. Sean X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Para cada $x \in X$, notemos $C_x = \{y \in X \mid y\mathcal{R}x\}$. Probar que $C_x \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y que para todo par $x_1, x_2 \in X$, vale que $C_{x_1} = C_{x_2}$ ó $C_{x_1} \cap C_{x_2} = \emptyset$.

3. Probar que:

   a) Para todos $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$,
$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}.$$

   b) Para todos $k, n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $k \leq n+m$,
$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=\max(0,m-k)}^{\min(k,n)} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}.$$

4. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el polinomio $\frac{X^n-1}{X-1}$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

   b) Si $n = p_1p_2p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ primos distintos, el producto de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad es -1.

   c) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz triple de un polinomio $f \in \mathbb{C}[X]$, el resto de dividir a f' por $(X-\alpha)^3$ tiene grado 2.

5. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Probar que si $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$, $(a : b) = 1$ y $(c : d) = 1$, entonces $|b| = |d|$.

Justificar debidamente todas las respuestas

1	2	3	4	5

Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
N° DE LIBRETA:
CARRERA:

ÁLGEBRA I - FINAL

28/10/2009

1. a) Dado $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, se define el *conjugado de* P como $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k X^k$. Probar que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P si y solo si $\bar{z} \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{P}$.
   b) Probar que si $P \in \mathbb{R}[X]$ y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P, entonces $\bar{z}$ es raíz de P con la misma multiplicidad.

2. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ coprimos. Probar que:
   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > ab$, existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $n = ra + sb$.
   b) No existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $ab = ra + sb$.

3. Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función definida recursivamente por:
$$T(n) = 7 \cdot T\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + n^2 \quad \text{y} \quad T(1) = 1.$$
   Probar que $T(n) \leq 2n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $a \in \mathbb{R}$, $[a]$ es la parte entera de a, es decir, el único entero tal que $[a] \leq a < [a] + 1$.

4. Probar la siguiente versión del Teorema Chino del Resto: Dados $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ coprimos, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, el sistema
$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$
   tiene una única solución $x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x_0 < m_1 m_2$.

5. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decidir si es verdadera o falsa. Justificar.
   a) Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ son tales que $a \nmid b$ y $a \nmid c$, entonces $a \nmid b + c$.
   b) Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Entonces para todo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : n) = 1$, vale $a^{2n-1} \equiv a^n \pmod{n}$.
   c) Si $n = p_1 p_2 p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ primos distintos, la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad es -1.

Justificar debidamente todas las respuestas

Final de álgebra 1
(3 de agosto de 2010)

LU $N°$	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota

(1) Determine cuáles de las siguientes propiedades: reflexividad, transitividad, simetría o antisimetría, tiene la relación

$$x\,R\,y \quad \text{si y sólo si} \quad x+y \quad \text{es par,}$$

definida en $\mathbb{Z}$.

(2) De cuantas maneras se pueden ubicar 21 bolitas verdes indistinguibles en 6 cajas numeradas con la condición de que haya exactamente 2 cajas vacías y al mismo tiempo en las tres últimas cajas (es decir en las nros 4, 5 y 6) haya en total 15 bolitas.

(3) Encuentre $(a^{100} - 2^{42} : 231)$, para cada $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 231) = 1$.

(4) Para cada raíz 15-ava de la unidad, calcule

$$z^{46} + z^{17} + \overline{z} + z^{19} + \overline{z}^{8} + z^{8} + z^{-2} + z^{41}.$$

(5) Sean a, b, c las raíces de $X^3 + 2X^2 + 3X - 1$. Encuentre un polinomio P de grado 3, con coeficientes enteros, cuyas raíces sean ab, ac y bc.

Justifique todas las respuestas

1	2	3	4

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
Final – 14/12/2010

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.

   a) Contar la cantidad de funciones inyectivas $f : A \to B$ que satisfacen que $\{1, 2\} \subset \mathrm{Im}(f)$.

   b) Contar la cantidad de funciones sobreyectivas $f : B \to A$ que satisfacen $\#(f^{-1}(1)) \geq 7$.

2. a) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones de congruencias sea compatible en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 6\,x \equiv a^{121} \pmod{20} \\ 14\,x \equiv 3 \pmod{15} \end{cases}.$$

   b) Elegir un a para el cual sea compatible y resolverlo.

3. Sea $z \in G_5$, $z \neq 1$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales

$$\sum_{i=2}^{n} z^i = 0.$$

4. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado 6 que satisface simultáneamente:

   - $X^2 - 2 \mid (f : f')$,
   - f posee una raíz compleja de argumento $5\pi/4$,
   - Todas las raíces de f tienen igual módulo.

   Factorizar f en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
Final – 21/12/2010

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. la sucesión de polinomios definida por

$$\begin{cases} f_1 = X^2 + X + 1 \\ f_{n+1} = (X^2 - 2X + 3)\, f_n^2 + 2(f_n + 1) - 5 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término general es $a_n = \mathrm{gr}\,(f_n)$. Conjeturar una fórmula general para a_n y probarla.

2. *a*) Dado $n \in \mathbb{N}$, calcular $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.
   b) Sea A un conjunto finito no vacío. Probar que la cantidad de subconjuntos de A de cardinal par es igual a la cantidad de subconjuntos de A de cardinal impar.

3. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{103} + 3 : 4) = 2$ y $a^{212} \equiv 2 \pmod 7$.
   Hallar los posibles restos de dividir a a por 28.

4. Se define en G_{16} la siguiente relación:

$$w\,\Re\,z \iff w\,z^{-1} \in G_8.$$

   a) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.
   b) Sea $z_0 \in G_8$. Probar que $w\,\Re\,z_0 \iff w \in G_8$.

5. Probar que si tres números en $\mathbb{C}$ no nulos suman 1 y sus inversos también suman 1, entonces al menos uno de los tres es 1. (Sug: determinar cómo puede ser un polinomio mónico que tenga a los tres números por raíces).

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
Final – 28/12/2010

1. Sea $a \in \mathbb{N}$ impar, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números naturales definida por

$$\begin{cases} x_1 = 2\,a \\ x_{n+1} = 2\,x_n + 5\,a \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a) Probar que para todo $n \geq 2$ se tiene $a \mid x_n$ y $2 \nmid x_n$.
   b) Deducir el valor de $(x_1 : x_n)$ para todo $n \geq 2$.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$,

   a) calcular
$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$
   b) probar que
$$2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

3. Sean w una raíz primitiva de orden 14 de la unidad y $z = \cos\frac{2\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{10}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $w^{2n} \in \mathbb{R}_{>0}$ y $z^{n+2} \in \mathbb{R}_{<0}$ simultaneamente.

4. Sea p un primo positivo y
$$f = x^{p^3} - 2x^{p^2} + x^p + p + 1.$$
   a) Probar que $f(a)$ es congruente a 1 modulo p para todo $a \in \mathbb{Z}$.
   b) Probar que f no tiene raíces racionales.

5. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de multiplicidad exactamente 3 de f. Probar que el resto de dividir a f' por $(x-\alpha)^3$ es de la forma $c(x-\alpha)^2$ donde c es una constante no nula.

Justifique todas sus respuestas

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
Final – 22/02/2011

1. Sea $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ la función definida por $f(a, b) = 18\,a + 35\,b$.
   (a) Determinar (demostrando o dando un contraejemplo) si f es inyectiva y si f es suryectiva.
   (b) Describir los conjuntos $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}(\{10\})$.

---

2. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$\begin{cases} f_1 = (x-1)^{10} \\ f_{n+1} = f_n^2 + f_1^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Determinar la multiplicidad exacta de 1 como raíz de f_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, y probarlo.

---

3. Dado $n \in \mathbb{N}$, encontrar una fórmula sin sumatoria para

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

   (sugerencia, mostrar que para $1 \le k \le n$ se tiene $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ y utilizarlo).

---

4. Para cada $a \in \mathbb{Z}$, calcular el valor de $(3^{16}a + 5 : 3^{17}a + 66)$.

---

5. (a) Probar que si ω es una raíz quinta primitiva de 1, entonces $\omega + \overline{\omega}$ es raíz del polinomio $X^2 + X - 1$.
   (b) Calcular $\cos(2\pi/5)$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
Final – 1/03/2011

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (a) ¿Cuántas funciones se pueden definir de A en A tales que $f(1)$ es impar? ¿Y que sean además suryectivas?

   (b) ¿Cuántas relaciones se pueden definir en A que sean a la vez reflexivas y simétricas?

2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha + \beta$ y $\alpha\,\beta$ pertenecen a $\mathbb{Z}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^n + \beta^n$ pertenece a $\mathbb{Z}$.

3. Probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$ vale
$$92 \mid 2\,a^{13^{10}} - 2a.$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calcular
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right).$$

5. Sean p un primo positivo impar y $f = p\,X^{p+1} - (p+1)X^p + 1$.

   (a) Probar que 1 es la única raíz racional de f.

   (b) Hallar todas las raíces complejas múltiples de f y determinar su multiplicidad.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:
CARRERA:

Algebra I
Final – 11/03/2011

---

1. Se define en $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{R}$ siguiente

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff \text{existe } n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ tal que } y = 2^n\,x.$$

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

   (b) Encontrar un conjunto $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 200\}$ de cardinal lo más grande posible tal que $3 \in A$ y para todo x, y en A se tiene $x\,\mathcal{R}\,y$ o $y\,\mathcal{R}\,x$.

---

2. Determinar una fórmula cerrada (sin sumatorias) para la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{2k+1},$$

para $n \in \mathbb{N}$, y probar su validez.

---

3. Sean a y b enteros tales que $4a + 2 \equiv 3 \pmod{11}$ y $4b + 2 \equiv 3 \pmod{13}$. Determinar el resto de dividir $26a - 33b$ por 143.

---

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$,

   (a) calcular el producto de todas las raíces n-ésimas primitivas de 1,

   (b) calcular el producto de todas las raíces n-ésimas de 1.

---

5. (a) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio "capicúa" de grado 4, es decir $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$ donde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f, entonces $1/\alpha$ también.

   (b) Probar que un polinomio "capicúa" de grado 5 tiene la misma propiedad, y además tiene al número -1 como raíz.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA 1 (MAYO 2011)

1. *Calcule cuantas funciones sobreyectivas* f *de* $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ *en* $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ *hay, tales que* $f^{-1}(\{a\})$ *y* $f^{-1}(\{b\})$ *tienen exactamente* 2 *elementos.*

2. *Encuentre el resto de dividir por* 21 *la suma de los divisores positivos de* $3^{22}5^{33}$.

3. *Encuentre todos los* $z \in \mathbb{C}$ *tales que*

$$|z| = 1 \quad y \quad \mathcal{R}e(z^4) = -\mathcal{I}m(z^4).$$

4. *Factorize en* $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ *y* $\mathbb{C}[X]$ *el polinomio*

$$X^6 - 6X^5 + 14X^4 - 8X^3 - 14X^2 + 10X + 7$$

sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 1 *y cuyo producto es* -1, *que además son múltiples.*

Justifique todas sus respuestas

Algebra I
Examen Final (02-08-11)

Nombre y apellido:

Libreta: Carrera:

1	2	3	4	5	N

1. Si n es impar, determinar el número de boletos capicúas de n dígitos que contienen por lo menos dos ceros.

2. Probar que
$$\sum_{j=0}^{m} j\binom{m}{j} = m2^{m-1}$$
para todo $m \geq 0$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 3$. Calcular $(25a^3b : a^4 + b^4)$.

4. Si w es una raíz séptima primitiva de 1, probar que $w + \overline{w}$ es raíz del polinomio $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

5. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ el polinomio
$$x^6 + 4x^5 + 7x^4 - a^3x^3 + 7x^2 + a^2x + 1$$
admite a -1 como raíz múltiple. Para cada valor de a hallado factorizar el correspondiente polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

Algebra I
Examen Final (09-08-11)

Nombre y apellido:

Libreta: Carrera:

1	2	3	4	5	N

1. Si $U = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ y $A = \mathbb{P}(U) - \{\emptyset\}$, se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en A:

$$X \mathcal{R} Y \iff (\min X = \min Y) \wedge (\max X = \max Y).$$

Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y calcular

$$\#(Cl(\{101, 201\})).$$

2 Sea $f = x^2 + ax + b$ en $\mathbb{Z}[x]$ y sean α y β las raíces de f en $\mathbb{C}$. Demostrar que $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \geq 0$.

3. Probar que la ecuación diofántica

$$(2^{45} + 11)X + (2^{44} + 121)Y = c$$

es resoluble para todo $c \in \mathbb{Z}$.

4. Si w es una raíz sexta primitiva de la unidad, determinar *todos* los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\prod_{i=0}^{n} w^{2i} = 1.$$

5. Sean α, β y γ las raíces en $\mathbb{C}$ de $x^3 - 3x + 1$. Determinar un polinomio mónico de grado 3 cuyas raíces sean $1 - \alpha^{-1}$, $1 - \beta^{-1}$ y $1 - \gamma^{-1}$.

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

Final de Álgebra 1, 14/12/2012

1. Sea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Determinar cuántas relaciones de equivalencia en A hay que tengan exactamente 2 clases de equivalencia. Determinar cuántas relaciones de equivalencia en A hay que tengan exactamente 3 clases de equivalencia.

2. Hallar el resto de la divisin de 2^{2^n} por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible, y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $p(x)$. Probar que si $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio tal que $q(\alpha) = 0$ entonces $p(x) \mid q(x)$. Sugerencia: considerar $(p : q)$.

4. Hallar un polinomio de grado 2 en $\mathbb{Z}[x]$ mónico tal que

$$\begin{aligned} f(0) \equiv f(1) \equiv 0 \quad &(\mathrm{mod}\ 3), \\ f(0) \equiv f(2) \equiv 0 \quad &(\mathrm{mod}\ 5) \text{ y} \\ f(2) \equiv f(4) \equiv 0 \quad &(\mathrm{mod}\ 7). \end{aligned}$$

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el grupo de raíces n-ésimas de la unidad G_n. Si $w \in G_n$, definimos su orden como

$$ord(w) = \min_{m \in \mathbb{N}} \{m \ : \ w^m = 1\}.$$

Probar que $ord(w) \mid n$. Probar además que si $w \in G_n$ tiene orden k, entonces w es una raíz primitiva de orden k.

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

Final de Álgebra 1, 21/12/2012

1. (a) Sea f_n la sucesión de Fibonacci, dada por

$$f_0 = 0,\ \ f_1 = 1,\ \ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}\ \forall n \geq 1.$$

Sean a, $b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos. Probar que $\forall n \geq 0$ se tiene

$$(f_n a + f_{n+1} b\ :\ f_{n+1} a + f_{n+2} b) = (a\ :\ b).$$

(b) Encontrar otra sucesión g_n en $\mathbb{Z}$ tal que

$$(g_n a + g_{n+1} b\ :\ g_{n+1} a + g_{n+2} b) = (a\ :\ b), \quad \forall n \geq 0.$$

2. (a) Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 5 tal que $1 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{3}$ son raíces de f. Probar que f tiene una raíz racional.

(b) Encontrar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 5 con raíz $1 + \sqrt{2}$ pero sin raíces racionales.

3. Probar que si p y q son primos positivos distintos, y si a es coprimo con pq, entonces $a^{[p-1\,:\,q-1]} \equiv 1 \pmod{pq}$.

4. Dado $k \in \mathbb{N}$, $G_k = \{z \in \mathbb{C} \mid z^k = 1\}$. Probar que si n y m son coprimos, la función $f : G_n \times G_m \to G_{nm}$, $f(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ es biyectiva.

5. Encontrar todos los enteros $0 \leq a \leq 2400$ que son divisibles por 8 y tales que su desarrollo en base 7 tiene al menos 3 dígitos iguales.

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

Final de Álgebra 1, 28/12/2012

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por G_n al conjunto de raíces n-ésimas de la unidad. Probar que si p y q son primos positivos distintos, la suma de las raíces primitivas de G_{pq} es 1.

2. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio tal que al evaluarlo en cualquier número entero a, $f(a)$ resulta siempre un múltiplo de 101 o un múltiplo de 107 (ambos son números primos). Probar entonces que o bien $f(a)$ es siempre divisible por 101 para todos los valores de a, o bien $f(a)$ es siempre divisible por 107 para todos los valores de a.

3. Dado un número natural n, determinar el resto de dividir por 5 a n^n en términos de una congruencia adecuada para n.

4. Decir si una relación en un conjunto A puede ser

   (a) simétrica, antisimétrica y transitiva.
   (b) simétrica, antisimétrica y no transitiva.
   (c) simétrica, no antisimétrica y transitiva.
   (d) simétrica, no antisimétrica y no transitiva.
   (e) no simétrica, antisimétrica y transitiva.
   (f) no simétrica, antisimétrica y no transitiva.
   (g) no simétrica, no antisimétrica y transitiva.
   (h) no simétrica, no antisimétrica y no transitiva.

   Encontrar un ejemplo en los casos afirmativos y demostrar la imposibilidad en los negativos. Sugerencia: en todos los casos positivos alcanza con un conjunto A de 3 elementos.

5. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

   sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

Final de Álgebra 1, 22/02/2013

1. Un mazo de 50 cartas españolas, posee 10 cartas especiales que son los 8 y 9 de cada palo, más los dos comodines. Además de estas 10 cartas especiales, vienen las 40 cartas clásicas. Un fábrica de cartas decide empaquetar sus cartas poniendo las 40 cartas comunes ordenadas por número y palo (viniendo primero los oros, luego las copas, luego las espadas y por último los bastos) y colocando las otras 10 cartas especiales en cualquier orden, intercaladas entre las 40 cartas comunes. ¿De cuántas maneras puede venir el mazo?

2. El objetivo de este ejercicio es demostrar el resultado conocido de la conmutatividad del producto de números naturales (con lo cual no se puede usar esta propiedad). Para ello definimos una función $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:
$$p(m,n) = \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ veces}}.$$
Notar que justamente esta función coincide con el producto de números naturales. La definición formal e inductiva de esta función es la siguiente:
$$p(m,n) = \begin{cases} m & \text{si } n = 1, \\ p(m,n-1) + m & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$
Probar que para todo par de números naturales m, n, vale que
$$p(m,n) = p(n,m).$$
Sugerencia: hacer inducción en $\max(n,m)$.

3. (a) Encontrar un número primo p y un número primo q tal que la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ tenga solución y la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{q}$ no tenga solución.

   (b) Encontrar un número natural m que sea el producto de 3 números primos y tal que la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ tenga exactamente 4 soluciones módulo m.

   (c) Encontrar un número natural m que sea el producto de 3 números primos y tal que la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ tenga exactamente 8 soluciones módulo m.

4. Consideremos un polinomio cúbico $q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{C}$, y supongamos que $q(x)$ tiene al menos dos raíces racionales.

   (a) Probar que si $a \in \mathbb{Q}$ entonces $q \in \mathbb{Q}[x]$ y todas sus raíces son racionales.

   (b) ¿Es cierto que si $c \in \mathbb{Q}$ entonces $q \in \mathbb{Q}[x]$ y todas sus raíces son racionales? (dar una demostración o un contraejemplo).

   (c) ¿Es cierto que si $b \in \mathbb{Q}$ entonces $q \in \mathbb{Q}[x]$ y todas sus raíces son racionales? (dar una demostración o un contraejemplo).

5. Recordar que si n es un número natural, el n-ésimo número de Fermat se define como
$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$
   Probar las siguientes afirmaciones:

   (a) El número F_n es divisible por 5 si y solo si $n = 1$.

   (b) El número F_n nunca es divisible por 7.

   (c) El número F_n nunca es divisible por 11.

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

Final de Álgebra 1, 1/03/2013

1. Sean n, $m \in \mathbb{N}_0$. Probar que $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$.

2. Siguiendo la idea de Fermat, uno puede considerar los números $T_n = 3^{3^n} + 2$. Lamentablemente, esto rara vez da un número primo, como veremos a continuación:

   (a) Probar que si n es par entonces T_n es divisible por 5.

   (b) Probar que si $n \equiv 3 \pmod 4$ entonces T_n es divisible por 11.

3. Un número entero se dice *libre de cuadrados* si no es divisible por el cuadrado de ningún primo. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n naturales consecutivos tales que ninguno es libre de cuadrados.

4. Tomemos $\mathcal{A}$ un subconjunto de los números naturales, sobre el cual queremos definir una relación de equivalencia $\mathcal{P}$.

   (a) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de los 10 primeros números naturales, o sea $\mathcal{A} = \{1, \dots, 10\}$, ¿cuál es el número mínimo de elementos que puede tener $\mathcal{P}$ si queremos que haya dos clases de equivalencia?

   (b) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de los primeros 7 números naturales, o sea $\mathcal{A} = \{1, \dots, 7\}$, ¿cuál es el número máximo de elementos que puede tener $\mathcal{P}$ si queremos que haya tres clases de equivalencia?

5. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $\Phi_n \in \mathbb{C}[x]$ como el polinomio mónico que tiene como raíces simples a las raíces n-ésimas primitivas de la unidad. Por ejemplo $\Phi_4 = (x - i)(x + i) = x^2 + 1$.

   (a) Probar que si $k \mid n$ y $1 \le k < n$ entonces $\Phi_n \mid \frac{x^n - 1}{x^k - 1}$.

   (b) Probar que si p, $q \in \mathbb{N}$ son primos distintos entonces $\Phi_{pq} = \frac{(x^{pq}-1)(x-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}$.

ÁLGEBRA I

FINAL - 23 de Julio de 2013

LU $N°$	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota

1. Pruebe que la sucesión de Fibonacci

$$a_1 = a_2 := 1,$$
$$a_{n+1} := a_{n-1} + a_n \qquad \text{para } n \geq 2,$$

satisface $a_n a_{n+1} - a_{n-1}a_n = a_n^2$ para todo $n \geq 2$. Use esto para probar que

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

2. En un test de 20 preguntas con dos opciones cada pregunta, ¿De cuántas formas pueden marcarse las respuestas para que resulten

a) siete respuestas correctas y trece equivocadas,

b) al menos diecisiete respuestas correctas?

3. Un grupo de 17 piratas se repartió por partes iguales una cantidad de monedas de oro, todas del mismo valor, y sobraron 3. Después de pelear por estas, uno de ellos fue asesinado. Al repartir de nuevo el total de las monedas, sobraban 10, y de nuevo lucharon por ellas y uno de ellos resultó muerto. Luego de eso, pudieron repartirse las monedas en forma equitativa, sin que sobre ninguna. ¿Cual es el mínimo número posible de monedas que tenían?

4. Sea $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. Pruebe que

$$w := \frac{z+1}{z-1}$$

es imaginario puro si y solo si $|z| = 1$.

5. Hallar $a, b \in \mathbb{C}$ tales que los polinomios

$$X^3 + aX^2 + 11X + 6 \qquad \text{y} \qquad X^3 + bX^2 + 14X + 8$$

tengan un factor común de la forma $X^2 + pX + q$.

Justifique todas las respuestas.

ÁLGEBRA I

FINAL - 6 de agosto de 2013

LU $N°$	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota

1. Calcule el número de relaciones simétricas que se pueden definir en un conjunto finito con n elementos.

2. Sea U un conjunto finito con n elemntos, y sean $A, B \subseteq U$. Supongamos que
$$|A \cap B| = \frac{2}{5}n, \quad |B| = \frac{1}{2}n \quad \text{y} \quad |(A \cap B^c)^c| = \frac{13}{20}n.$$
Calcule $|A|$ y $|A \triangle B|$.

3. Pruebe que si el polinomio $P(X) = X^3 + aX^2 + bx + c$ tiene dos raíces cuya suma es cero, entonces $ab = c$.

4. Se dispone de una cantidad par de monedas, menor que 600, que se quieren ubicar en varias filas. Si se ordenan en filas de 17 monedas, sobran 8. Si se consideran únicamente la mitad de las monedas iniciales y se ordenan en filas de 7 monedas, sobran 3. ¿Cuántas monedas hay? ¿Es única la solución?

5. Pruebe que si z y w son raíces n-ésimas de 1, entonces $(z+w)^n \in \mathbb{R}$.

Justifique todas las respuestas.

ÁLGEBRA I

FINAL - 13 de Septiembre de 2013

LU N°	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota

1. Sea $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ la función definida por $f(x,y) := (2x+y, x+2y)$ y sea f^n la composición de f n-veces. Pruebe que
$$f^n(x,y) = \left(\frac{3^n+1}{2}x + \frac{3^n-1}{2}y, \frac{3^n-1}{2}x + \frac{3^n+1}{2}y\right) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

2. Encuentre los valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales los polinomios
$$\lambda x^3 - x^2 - x - (\lambda+1) \qquad \text{y} \qquad \lambda x^2 - x - (\lambda+1)$$
tienen una raíz común, y encuentre dicha raíz.

3. Pruebe que en cualquier colección de siete números enteros siempre hay dos cuya suma o diferencia es divisible por 11.

4. Sean z_1, z_2 y z_3 tres números complejos de módulo 1, tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Pruebe que
$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0.$$

5. Sea A un conjunto y sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ relaciones en A. Pruebe que:
   (a) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son reflexivas, entonces $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ también lo son.
   (b) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son simétricas, entonces $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ también lo son.
   (c) Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son transitivas, entonces $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ también lo es.

   De un ejemplo de un conjunto A y relaciones transitivas $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en A, tales que $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ no es transitiva.

Justifique todas las respuestas.

ALGEBRA I

FINAL - 8 de Octubre de 2013

LU $N°$	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota

1. Pruebe que $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-1} = 2^n$ para todo n natural.

2. Un grupo de 8 amigos va esta noche al teatro y tiene entradas para sentarse en 8 asientos consecutivos. Entre ellos, Juan está peleado con María y con Pedro ¿ De cuántas formas distintas pueden sentarse en las 8 butacas de manera que Juan no se siente al lado de María ni de Pedro?

3. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $30^n \equiv 1(7)$.

4. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^{12} = 1$ y $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 \in \mathbb{R}$.

5. Hallar todos los polinomios $p \in \mathbb{R}[x]$ tales que $(x+1)p = (p')^2$ (donde p' es el polinomio derivado).

Justifique todas las respuestas.

ALGEBRA I

FINAL - 5 de Noviembre de 2013

LU N°	Apellido, Nombre — Email

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Nota

1. Se define la siguiente relación en $\mathbb{N}$:

$$aRb \text{ si y solo si existe } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} / b = 3^n a.$$

Determinar si R es una relación de equivalencia o de orden.

2. Pruebe que

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Para $a = 1147$ y $b = 851$, calcular el máximo comun divisor (a, b) y expresarlo en la forma $(a, b) = ra + sb$, con $r, s \in \mathbb{Z}$.

   (b) Determinar todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$1147x + 851y = 2$$

   explicando su respuesta.

4. Dado $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$, probar que $|z| = 1$ si y solo si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $z = \frac{1+ia}{1-ia}$.

5. Dado $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, probar que $p(x) - x$ divide a $p(p(x)) - x$.

Escriba prolijamente. Justifique todas las respuestas.

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013
Final – 13/12/2013

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Se define la relación $\Re$ siguiente en $\mathbb{N}$:

$$m \Re n \iff f(m) \mid f(n).$$

- Probar que $\Re$ es una relación de orden.
- Para la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(n) = 12n + 20$, caracterizar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $1 \Re n$.

2. Sea p un número primo positivo, $p \neq 3$, y sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que

$$(a + 4b)^p \equiv 4a + b \pmod{p} \iff a \equiv b \pmod{p}.$$

¿Por qué es necesario pedir $p \neq 3$?

3. Hallar un $n \in \mathbb{N}$, que sea el producto de dos números primos distintos y tal que la ecuación de congruencia

$$X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

tenga exactamente 4 soluciones distintas módulo n. Para el valor hallado, calcular las cuatro soluciones.

4. Sea la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios definida por:

$$f_1 = X^3 + X^2 - X - 1 \quad , \quad f_{n+1} = f_n + (2X^4 + 2X^3)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, -1 es raíz doble (¡exactamente doble!) de f_n.

5.
- Sea ω una raíz octava primitiva de la unidad. Probar que $\omega^4 = -1$.
- Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ se tiene que las raíces octavas primitivas de la unidad son raíces del polinomio

$$f = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + X^2 + 2X + a,$$

y para cada valor de a hallado, factorizar el polinomio f en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013
Final – 20/12/2013

1. Se define la relación $\Re$ siguiente en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n_1, m_1)\,\Re\,(n_2, m_2) \iff n_1 \mid n_2 \text{ y } m_2 \mid m_1.$$

- Probar que $\Re$ es una relación de orden.
- Calcular la cantidad de elementos $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que satisfacen simultáneamente que

$$(2, 2^5 3^{18})\,\Re\,(n, m) \quad \text{y} \quad (n, m)\,\Re\,(2^{10}, 6).$$

2. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Determinar los posibles restos de dividir por 220 a

$$2a^{13^{10}} - 2a.$$

3. Un número natural a se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores propios positivos. Por ejemplo, 6 es un número perfecto, dado que $6 = 1 + 2 + 3$.

   Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Probar que si $2^n - 1$ es un número primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto.

4. Determinar todos los polinomios de la forma

$$X^4 + iX^3 + 2X^2 + aiX + b$$

   con $a, b \in \mathbb{Z}$ *no nulos* y *coprimos* que admiten al menos una raíz racional. Para cada par de valores hallado factorizar el polinomio obtenido en $\mathbb{C}[X]$.

5. Sea p un número primo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013
Final – 27/12/2013

1. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea $\sim$ la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

   - Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
   - ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

2. Sea n un número natural ≥ 2 que no es múltiplo de 4. Probar que la cifra de las unidades de

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

es 6 u 8.

3.
   - Hallar los restos de dividir a $7 \cdot 109 + 2^{110}$ y a $3 \cdot 109 - 2^{109}$ por 13.
   - Sea $n \in \mathbb{N}$ *impar*. Determinar los posibles valores de $(7n + 2^{n+1} : 3n - 2^n)$ y para cada valor de d hallado, exhibir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(7n + 2^{n+1} : 3n - 2^n) = d$.

4.
   - Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ para los cuales el polinomio

$$X^5 + 15aX^4 + 12bX^3 - 18X^2 - 1$$

   tiene al menos una raíz racional.
   - Probar que cualesquiera sean a, b hallados en el inciso anterior, esa raíz racional es única y simple.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar el resto de dividir n^{2n} por 5 en términos de una congruencia adecuada de n.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2013
Final – 07/03/2014

1. Sea $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ la función definida por:

$$f(a, b) = 18\,a - 8\,b.$$

- Decidir si f es inyectiva.
- Calcular Im(f) y para cada $c \in \mathrm{Im}(f)$, describir el conjunto $\{\,(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; f(a, b) = c\,\}$.

2. Determinar todos los pares $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $2^n \equiv 8^m \pmod{10}$.

3. Determinar todos los primos positivos p que satisfacen:

$$2p \mid 6^{p-1} + 216.$$

4. Sea ω una raíz de orden 10 de la unidad distinta de 1. Determinar el valor de

$$\omega\,\Big(\sum_{k=0}^{3^{150}-1} \omega^k\Big).$$

5. Sea $f = X^2 + aX + b$ un polinomio con coeficientes *enteros*, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ las raíces de f.

- Probar que $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ y $\alpha^2 + \beta^2$ pertenecen a $\mathbb{Z}$. (Sug: calcular $(X - \alpha)(X - \beta)$.)
- Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: CARRERA:

Algebra I - Verano 2014
Final – 24/04/2014

1. Sea en $\mathbb{N}$ la relación
$$a \prec b \iff \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = n^2 a.$$
   a) Probar que $\prec$ es una relación de orden, y que existen $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $a \not\prec b$ y $b \not\prec a$.
   b) Sea $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 1000\}$ que satisface la propiedad que $\forall\, a, b \in A$ se tiene que $a \prec b$ o $b \prec a$. ¿Cuál es la cantidad máxima de elementos que puede tener A?

2. Decidir si existen $a, b \in \mathbb{N}$ que satisfacen
   a) $2a^6 = 3b^3$.
   b) $2a^3 = 3b^2$.

3. Sea p un primo impar.
   a) Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq \pm 1$. Probar que $a^{(p-1)p^n} - 1 \mid a^{(p-1)p^{n+1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y hallar el cociente.
   b) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Probar que si $p \nmid a$, entonces $a^{(p-1)p^n} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a^{212} \equiv 2 \pmod 7$ y $(a^{103} + 3 : 4) = 2$.
   Hallar los posibles restos de dividir a a por 28.

5. Calcular la cantidad de factores irreducibles de $X^{20} - X^{10} - 1$ en $\mathbb{R}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

Álgebra I - Final - 22/7/2014

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre:

No. de libreta:

Carrera:

---

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(X)$ definida por

$$A \mathcal{R} B \iff A \triangle \{1,2\} \subseteq B \triangle \{1,2\}$$

   a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

   b) Calcular la cantidad de subconjuntos B de X de 5 elementos tales que $\emptyset \mathcal{R} B$.

2. a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\prod_{i=1}^{n}(n+i) = 2^n \prod_{i=1}^{n}(2i-1).$$

   b) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(2^n)!$ es divisible por 2^{2^n-1} y no es divisible por 2^{2^n}.

3. Encontrar el resto de dividir a $123^{456^{789}}$ por 43.

4. Sea ω una raíz séptima primitiva de la unidad. Probar que

$$\sum_{j=0}^{38} \omega^j + \overline{\omega}^j = 1 \qquad\qquad \mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{38} \omega^j - \omega^{-j}\right) = 0.$$

5. Sea $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado 7 tal que:

   - $f(0) = 0$ y $f(i) = -3i$;
   - $f'(0) = 0$ y $f'(i) = -21$.

   Hallar las raíces no reales del polinimio $f(x) - 3x^7$ y su multiplicidad. Hallar todas las posibles factorizaciones de $f(x) - 3x^7$ en $\mathbb{C}[x]$.

Álgebra I - Examen Final (29/7/2014)

1	2	3	4	5

CALIF.

Fecha:

Nombre y apellido: Turno:

Nº de documento: Nº de libreta:

---

1. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto. En $\mathbb{C}[X]$, definimos una relación

$$P \simeq Q \text{ si y sólo si } P(a) = Q(a) \text{ para todo } a \in A$$

   a) Pruebe que $\simeq$ es una relación de equivalencia.
   b) Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es finito, muestre que $P \simeq Q$ si y sólo si $P - Q$ es divisible por el polinomio

$$D_A(X) = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n)$$

   c) Pruebe que si A es infinito, la clase de equivalencia de cualquier polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ es $\{P\}$.

2. Demostrar que para cualquier $s \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{s+i}{s} = \binom{s+n+1}{s+1}$$

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, notamos por $d(n)$ a la cantidad de divisores positivos de n. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $d(n)$ es impar si y sólo si n es un cuadrado.

4. Para una multitudinaria fiesta se espera la presencia de exactamente 5000 invitados. Los organizadores disponen de dos tipos de mesas con las que deben asegurar que no falte ni sobre ningún lugar para que se sienten todos los invitados: mesas medianas, para 8 personas cada una, y mesas grandes, para 14 personas cada una. Además, los organizadores son supersticiosos, y quieren que la cantidad total de mesas utilizadas sea un múltiplo de 13. ¿De cuántas maneras distintas pueden elegir la cantidad de mesas de cada tipo?

5. Sean $k \in \mathbb{N}$, y $n = 2^k$. Probar que ω es una raíz primitiva n-ésima de la unidad si y sólo si ω es raíz del polinomio $P_k = X^{2^{k-1}} + 1$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS SIN OMITIR DETALLES

ESCRIBA LA RESOLUCIÓN DE CADA PROBLEMA EN UNA HOJA SEPARADA