FINAL 24/02/12 ✓

1) ENUNCIAR Y DEMOSTRAR LA REGLA DE BARROW.

2) ENUNCIAR Y DEMOSTRAR EL TEOREMA DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EN DOS VARIABLES.

3) CONSIDEREMOS EL ABIERTO $A=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, Y $f:A\to\mathbb{R}$ DEFINIDA POR

$$f(x,y)=\ln(\|x,y\|)\cdot\|x,y\|$$

VER TEO 2.2. DE LAROTONDA

a) VER QUE EXISTE EL $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=l$.

b) CONSIDERANDO LA FUNCIÓN $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ DEFINIDA POR $F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y)\in A \\ l & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

PROBAR Q F ES CONTINUA EN EL $(0,0)$.

c) ¿ES LA FUNCIÓN f DIFERENCIABLE EN A? ¿ES LA FUNCIÓN F DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2$?

4) PARA CADA $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ CONSIDERE EL RECTÁNGULO

$$R_{xy}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 / 0\leq u\leq 1,\ 0\leq v\leq x^2+y^2+1\}$$

SEA $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ LA FUNCIÓN DEFINIDA POR LA INTEGRAL $\iint_{R_{xy}} u(1-2e^{-v^2})\,du\,dv$.

PROBAR QUE EL $(0,0)$ ES UN PUNTO CRÍTICO DE F Y DECIDIR SI ES UN EXTREMO O UN PUNTO SILLA.

24/02/12

① Enunciar y demostrar la Regla de Barrow

Sea f continua y $G'(x) = f(x)$ $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

Demostración:

Por TFC, $\exists$ F tal que $F'(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Como $F'(x) = f(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + c$.

$\Rightarrow \boxed{G(b) - G(a)} = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$

② Enunciar y demostrar el teorema de Multiplicadores de Lagrange en dos variables.

Hipótesis $g \in C^1$, f diferenciable. y (P_1, P_2) un extremo de f restringido a la curva de nivel $\{S = \{x \in \mathbb{R}^2 / g(x) = c\}$. y $\nabla g(P) \neq (0,0)$

Entonces $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$

Demostración: Supongamos $g_y(P) \neq 0$. Como $g \in C^1$ y $\nabla g(P) \neq (0,0)$, entonces puedo aplicarle a g el Teorema de la función implícita. O sea, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

$\varphi: (P_1 - \varepsilon_1; P_1 + \varepsilon_1) \longrightarrow (P_2 - \varepsilon_2, P_2 + \varepsilon_2)$ tal que $\varphi(P_1) = P_2$

Entonces $P = (P_1, \varphi(P_1))$. Como P es un máximo de f restringido a S, $f(P) > f(X)$ $\forall x \in S \cap B_r(P)$.

$$f(P_1, \varphi(P_1)) > f(\alpha, \varphi(\alpha))$$

En particular, la función $h(x) = f(x, \varphi(x))$ tiene un extremo local (máximo) en P_1. O sea, su derivada debe anularse

$$h'(x) = (f(x, \varphi(x)))' = \nabla f(x, \varphi(x)) \cdot (1, \varphi'(x)) = 0$$

$$= (f_x, f_y) \cdot (1, \varphi'(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(P), (1, \varphi'(x)) \rangle = 0$$

Consideremos $g'(P) = 0$ (pues $P \in S \Rightarrow g(P) = c$)

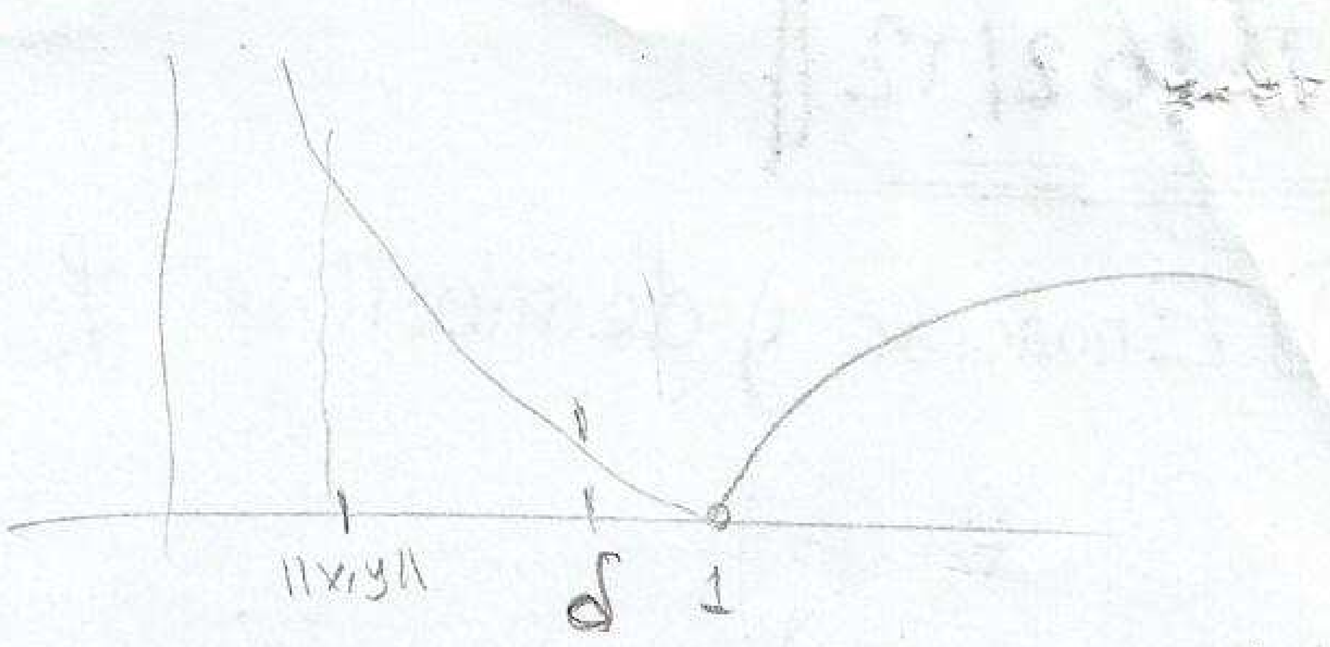
$g'(x, \varphi(x)) = 0$ $(x, \varphi(x))$

$\langle \nabla g(P), (1, \varphi'(x)) \rangle = 0$ $\longrightarrow$ Como $\nabla f(P)$ y $\nabla g(P)$ son ortogonales al mismo vector deben ser paralelos, o sea, linealmente dependientes. O sea $\boxed{\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)}$

③ $f: A \to \mathbb{R}$ con $A = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

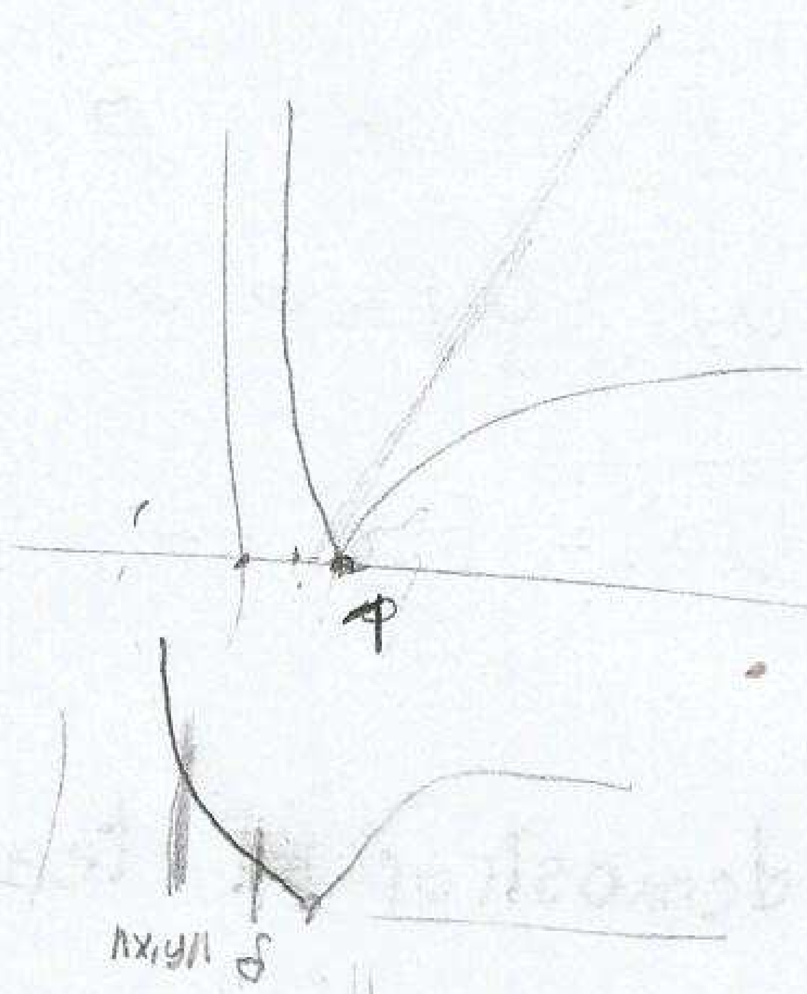
$$f(x,y) = \ln(\|x,y\|) \cdot \|x,y\|$$

a) ver que $\exists \; l = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$



b) definiendo $f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in A \\ l & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, Probar continuidad

c) ¿es diferenciable? en $\mathbb{R}^2$ / en A

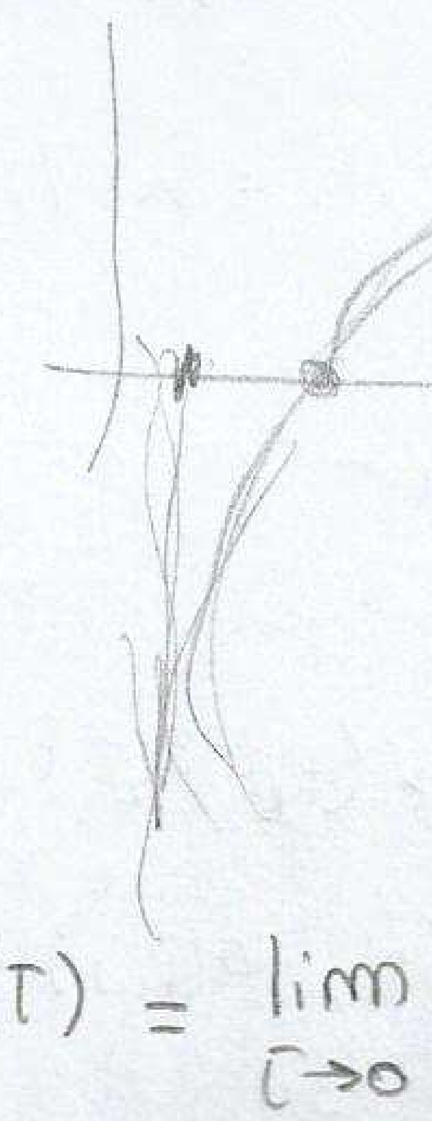


~~a) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 0$~~

~~sea $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta$.~~

~~$\Rightarrow |\ln(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{x^2+y^2} - 0| \leq$~~

a) Sea $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $g(x,y) = \|x,y\|$
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $h(x) = \ln(t) \cdot t$



$f(x,y) = h(g(x,y))$

Por Teorema del límite de composición,

$$\lim_{(x,y \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} h(g(x,y)) = \lim_{t \to g(x,y)} h(t) = \lim_{t \to 0} \ln(t) \cdot t = 0$$

(por l'hospital)

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Quiero ver que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 0$.

c) f es diferenciable en A por composición de funciones diferenciables (porque ln es continuo)

24/02/12

falta ver dif en (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,) - f(0)}{h} = \frac{\ln(\sqrt{h^2}) \cdot |h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(h) \cdot h}{h} = \lim \ln(h) = -\infty$$

$\Rightarrow$ No dif

(4) $R_{xy} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1 \quad 0 \leq v \leq x^2+y^2+1\}$

$$F = \iint_{R_{xy}} u \cdot (1 - 2e^{-v^2})\, du\, dv$$

Probar (0,0) crítico

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2+1} u \cdot (1 - 2e^{-v^2})\, dv\, du$$

$$= \int_0^1 u\, du \cdot \int_0^{x^2+y^2+1} 1 - 2e^{-v^2}\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2+1} 1 - 2e^{-v^2}\, dv$$

$g(x,y) = x^2+y^2+1$

$h(x) = \frac{1}{2} \int_0^x 1 - 2e^{-v^2}\, dv$; $f(x,y) = h(g(x,y))$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h(g)}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - 2e^{-(x^2+y^2+1)^2}\right) \cdot 2x$$

(0,0) = 0

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-(x^2+y^2+1)^2}\right) \cdot 2y$$