$\boxed{\text{FINAL } 27/12/11}$ ✓

1) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en (x_0,y_0).

2) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable. Probar que $\forall\,\varepsilon>0$ existe una partición π tal que

$S(f,\pi)-I(f,\pi)<\varepsilon$.

4) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y derivable, con $f'(t)>0\ \forall t\in\mathbb{R}$. Sea $F(x,y)$

definida por $\int_y^x f(t)\,dt$.

i) Probar que F es diferenciable.

ii) Probar que F no tiene máximos ni mínimos en $\mathbb{R}^2$.

3) Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F\in C^1$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $F(x,y)\in C$, con $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y+1=0\}$.

Mostrar q $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\det(D_F(x,y))=0$.

27/12/11

$F = \int_0^b f(t) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

~~② $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ inte~~

④ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y derivable. $f'(t) > 0$

$$F(x,y) = \int_y^x f(t)\,dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \int_x^y f(t)\,dt}{\partial x} =$$

$F'(t) \int_a^x f = f(x)$

i) Probar F diferenciable

ii) Probar que F no tiene máx ni mín en $\mathbb{R}^2$

i)

$F(x,y) = \int_y^x f(t)\,dt \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x)$

porque f es continua $\Rightarrow$ es integrable $\Rightarrow$ TFCI

$\Rightarrow$ Como F tiene n-1 derivadas parciales continuas $\Rightarrow$ f es diferenciable.

ii) F tiene máx o mín $\Rightarrow \nabla_F(x,y) = 0$ para algún (x,y)

$\nabla_F(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y)) = (f(x), -f(y))$

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ 0 & -f'(y) \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_F) < 0$$

$\Rightarrow$ Entonces si hay extremo son pto sillo

---

③ Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $F \in \mathcal{C}^1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $F(x,y) \in C$.

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y + 1 = 0\} = Gr\{y = x^2 + 1\}$

Probar que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\det(D_F(x,y)) = 0$

Supongo que $\exists (x_0, y_0) / \det(D_f(x_0, y_0)) \neq 0$

Como $\det(D_f(x_0,y_0)) \neq 0$ y $f \in \mathcal{C}^1$, aplico el Teorema de la función inversa, existen entonces U, V al rededor de (x_0, y_0), $f(x_0, y_0)$ respectivamente tal que $f: U \to V$ es biyectiva. Pero $f: U \to C \subseteq V$, o sea f no puede ser sobreyectiva. $\Rightarrow$ Abs