| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Calificación |
|---|---|---|---|---|---|
| B- | B | B | R | B | A |

APE

TUR

Segundo Cuatrimestre - Primer recuperatorio del Segundo parcial - 04/12/2018

1. Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tales que $69a + 33b = 21$ y $13 \mid a - 2b$.

2. Calcular el resto de dividir $213^{454}$ por 455.

3. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que satisfagan simultáneamente:

$$\arg\left((-1+i)^{2n}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \arg\left((1-\sqrt{3}i)^{n+1}\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

4. Sea $P = 2X^3 - X^2 + 5X - 6$ y sea $Q \in \mathbb{R}[X]$ de grado dos tal que $P + Q$ tiene como raíces a 1, 0 y -1. Encontrar el polinomio $f \in \mathbb{R}[X]$ de grado mínimo tal que $f$ sea mónico, $Q \mid f$ y $(f : f') = X^2(X-6)$.

5. Sea $f$ el polinomio dado por

$$f = X^5 - 3X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 10X + 12$$

Factorizar $f$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que tiene como raíz a una raíz cúbica de la unidad.

*Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.*
*Justifique todas sus respuestas.*

1) Si $13 | a-2b \Longrightarrow a-2b \equiv 0 (13)$

$a \equiv 2b (13)$ (I)

$69a+33b=21$. Divido por tres y me queda:

$23a+11b=7$. $\quad (23:11)=1$ y $1 | 7 \Rightarrow \exists$ sol $\in \mathbb{Z}$

Observo que $(-4,9)$ es solución particular.

Resuelvo el homogéneo:

$$23a+11b=0$$
$$\Longleftrightarrow 23a=-11b \Longrightarrow \begin{array}{l} 23 | b \\ 11 | a \end{array}$$

reemplazo $\cancel{23}\,\cancel{11}k=-\cancel{11}\,\cancel{23}q$ $\quad a=11k$

$\boxed{k=-q}$ $\quad b=23q$

todas las soluciones del homogéneo se escriben como $(-23q, +11q)$ y las soluciones del sistema inicial son

$(-23q-4, +11q+9)$

Reemplazo en (I)

$-23q-4 \equiv 2(11q+9)(13)$

$3q+9 \equiv 9q+5 (13)$

$6q \equiv 4 (13) \longrightarrow$ como $(6:13)=1$, puedo

$66q \equiv 44 (13)$ multiplicar por 11.

$\boxed{q \equiv 5 (13)}$

$\Longrightarrow a=-23(13t+5)-4$ $\quad a=-299t-119$

$b=+11(13t+5)+9$ $\quad b=143t+64$

② Para facilitarlo, voy a encontrar los factores primos de 455.

| | |
|---|---|
| 455 | 5 |
| 91 | 7 |
| 13 | 13 |
| | 1 |

$\Longrightarrow 455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$

Quiero encontrar $213^{454} \equiv x\ (455)$.

~~Esto para si~~

Busco los restos al dividir por sus factores primos.

I $\quad 213^{454} \equiv x_1\ (5) \Rightarrow 3^{454} \equiv x_1\ (5)$

Como $(3:5) = 1$, puedo usar el pequeño teorema de fermat $\longrightarrow a^{p-1} \equiv 1\ (p)$ si $(a:p) = 1$

$3^4 \equiv 1\ (5)$

$\underbrace{(3^4)^{113}}_{=1} \cdot \underbrace{3^2}_{=4} \equiv x_1\ (5) \longleftarrow$ (también funciona decir $3^{4q+r} \equiv x_1(5)$, $\underbrace{(3^4)^q}_{=1} \cdot 3^r \equiv x_1(5)$ con $0 \le r < 4$)

$\boxed{x_1 \equiv 4\ (5)}$ ✓

II $\quad 213^{454} \equiv x_2\ (7) \Rightarrow 3^{454} \equiv x_2\ (7)$

Como $(3:7) = 1$, puedo usar la misma versión del teorema de fermat que en el punto anterior: $\quad 3^6 \equiv 1\ (7)$

$(3^6)^{75} \cdot 3^4 \equiv x_2\ (7)$

$\boxed{4 \equiv x_2\ (7)}$ ✓

III $\quad 213^{454} \equiv x_3\ (13) \longrightarrow 5^{454} \equiv x_3\ (13)$

Usando lo mismo que en los puntos anteriores, obtengo que $5^{12} \equiv 1\ (13)$ ✓

$(5^{12})^{37} \cdot 5^{10} \equiv X_3 (13)$

$\boxed{X_3 \equiv 12 (13)}$

Necesito una respuesta mod 455

$\begin{cases} X_1 \equiv 4 (5) \\ X_2 \equiv 4 (7) \\ X_3 \equiv 12 (13) \end{cases}$ Puedo usar teorema ~~del resto chino~~ chino del resto, que me asegura una única solución mod 455.

$x = 5k + 4$ $\quad 5k + \cancel{4} \equiv \cancel{4}(7)$

$5k \equiv 0 (7) \quad k \equiv 0 (7)$

$x = 5(7q) + 4$

$x = 35q + 4$ $\quad 35q + 4 \equiv 12 (13)$

$9q \equiv 8 (13)$ como $(9:13) = 1$ puedo multiplicar x3

$x = 35(13u + 11) + 4$

$27q \equiv 24 (13)$

$x = 455u + 389$

$q \equiv 11 (13)$

Entonces, $r_{455}(213^{454}) = 389$

(3) $\arg((-1+i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$

$(2n)\arg(-1+i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(2n)\left(\frac{3}{4}\cancel{\pi}\right) = \cancel{\pi} \cdot \frac{1}{2} + 2k \cdot \cancel{\pi}$

$\frac{6n}{4} = \frac{1}{2} + 2k$ multiplico todo por 4 para ~~conven~~ trabajar con enteros

$\cancel{4} \cdot \frac{6n}{\cancel{4}} = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 4 \cdot 2k$

$6n = 2 + 8k \Longrightarrow 6n \equiv 2 (8)$

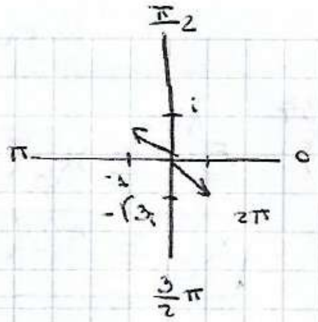
$\cancel{2} \cdot 3n \equiv \cancel{2} \cdot 1 (\cancel{2} \cdot 4)$

$3n \equiv 1 (4)$ como $(3:4) = 1$, mult. x3

$9n \equiv 3 (4)$

$\boxed{n \equiv 3 (4)}$

NOTA



$$\arg\left((1-\sqrt{3}i)^{n+1}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$(n+1)\arg(1-\sqrt{3}i) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$(n+1)\frac{5}{3}\cancel{\pi} = \frac{2}{3}\cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi}$$

mult. ×3 $\quad (n+1)\cdot\cancel{3}\cdot\frac{5}{\cancel{3}} = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} + 6k$

$$5n+5 = 2+6k$$

$$5n+5 \equiv 2 \ (6)$$

$$\underset{\equiv -1}{5}\,n \equiv -3\,(6)$$

$$-n \equiv -3\,(6)$$

$$\boxed{n \equiv 3\,(6)}$$

Quiero que se cumplan simultáneamente

$n\equiv 3\,(6)$ y $n \equiv 3\,(4) \longrightarrow n \equiv 1\,(2)$

$\longrightarrow n \equiv 3\,(3) \longrightarrow n \equiv 0\,(3)$

$n \equiv 1\,(2)$

$$\begin{cases} n \equiv 0\,(3) \\ n \equiv 1\,(2) \longrightarrow \text{redundante! ya quiero que } n \equiv 3(4) \\ n \equiv 3\,(4) \end{cases}$$

Como 3 y 4 son coprimos, puedo resolver usando teorema chino del resto.

$n = 4k+3 \qquad \underset{\equiv 1}{4}k + \overset{\equiv 0}{\cancel{3}} \equiv 0\,(3)$

$n = 4(3v)+3 \qquad k \equiv 0\,(3)$

$n \overset{=}{\equiv} 12v+3$

Rta $\boxed{n \equiv 3\,(12)}$

4) $P = 2x^3 - x^2 + 5x - 6$

Sea $Q = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$,

$P + Q = 2x^3 + (\alpha - 1)x^2 + (5+\beta)x - 6 + \gamma$

Sé que 0, 1 y -1 son raíces. Evalúo en 0.

Llamo $P + Q = G$

$G(0) = 2.0 + (\alpha - 1).0 + (5+\beta).0 - 6 + \gamma$

Como 0 es raíz de G, $G(0) = 0$.

$\Longrightarrow \quad 0 = -6 + \gamma \Longleftrightarrow \boxed{\gamma = 6}$ ✓

Evalúo en 1 y -1.

$G(-1) = 2(-1)^3 + (\alpha - 1)(-1)^2 + (5+\beta)(-1) \cancel{-6+6}$

$0 = -2 + \alpha - 1 - 5 - \beta$

$0 = -8 + \alpha - \beta \longrightarrow \alpha - \beta = 8$ ✓

$G(1) = 2(1)^3 + (\alpha - 1)(1)^2 + (5+\beta)(1) \cancel{-6+6}$

$0 = 2 + \alpha - 1 + 5 + \beta$ ✓

$-6 = \alpha + \beta$

SUMO AMBAS $(+)$ $\begin{cases} \alpha + \beta = -6 \\ \alpha - \beta = 8 \end{cases}$ $\quad 2\alpha = 2 \quad \boxed{\alpha = 1}$

$2\alpha + 0\beta = 2$

resto AMBAS $(-)$ $\begin{cases} \alpha + \beta = -6 \\ \alpha - \beta = 8 \end{cases}$ $\quad 2\beta = -14 \quad \boxed{\beta = -7}$ ✓

$0\alpha + 2\beta = -14$

NOTA

$Q = x^2 - 7x + 6$ Como $Q | f$,

$x^2 - 7x + 6 | f$, lo cual significa que comparten sus raíces. Las raíces de $Q$ son:

$$\frac{+7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1.6}}{2} \to x_1 = \boxed{6}, \quad x_2 = \boxed{1}$$ ✓

A su vez, quiero que $(f : f') = x^2(x-6)$, ~~esto~~ es decir, que sus raíces sean raíces al menos dobles de $f$. Las raíces de $x^2(x-6)$ son $6$ y $0$ (con multiplicidad doble).

Como lo quiero de grado mínimo, mi $f$ será: grado 7.

$$f(x) = x^3 (x-6)^2 (x-6)(x-1)$$ ✗

6 es raíz triple

~~Como 0 tiene multiplicidad doble~~

5) Sé que $f$ tiene $\overset{\text{como}}{}$ raíz a una raíz cúbica de la unidad. $\omega$ raíz de $f$, $\omega \in G_3$,

$$\omega \in \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

C. AUX:

$k=0$ $\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$

$k=1$ $\frac{2.1.\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=2$ $\frac{2.2\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow$ evalúo $f(1)$ para ver si es raíz.

$f(1) = (1)^5 - 3(1)^4 + 5(1)^3 + 6(1)^2 + 10 + 12 \neq 0$

$\Rightarrow$ 1 no es raíz de $f$. ✓

Como 1 no es raíz de $f$, y por enunciado sé que tiene como raíz al menos

HOJA Nº

FECHA

un $w \in G_3$, entonces o $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es raíz 3, o $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ lo es. Pero si $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es raíz 3, también lo es su conjugado, por lo tanto ambas son raíces de f.

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) . h(x)$$

Para encontrar $h(x)$, divido f por $\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$= x^2+x+1.$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -3x^4 & -5x^3 & +6x^2 & +10x & +12 & x^2+x+1 \\
\ominus\; x^5 & +x^4 & +x^3 & & & & x^3-4x^2-2x+12 \\
\hline
0 & -4x^4 & -6x^3 & +6x^2 & +10x & +12 & \\
\ominus & -4x^4 & -4x^3 & -4x^2 & & & \\
\hline
 & & -2x^3 & +10x^2 & +10x & +12 & \\
\ominus & & -2x^3 & -2x^2 & -2x & & \\
\hline
 & & & 12x^2 & +12x & +12 & \\
\ominus & & & 12x^2 & +12x & +12 & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Busco raíces ~~reales~~ racionales de $x^3-4x^2-2x+12$ con Gauss, ya que sus coeficientes son enteros.

$\alpha \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$f(-1) = (-1)^5 - 3.(-1)^4 - 5(-1)^3 + 6(-1)^2 + 10.(-1)+12 \neq 0$ ~~[illegible]~~

Ya sé que 1 no es raíz (lo probé antes). ~~[illegible]~~ de ~~[illegible]~~

$f(2) = (2)^5 - 3.(2)^4 - 5(2)^3 + 6(2)^2 + 10(2)+12 = 0$

$\rightarrow$ 2 es raíz de $x^3-4x^2-2x+12$.

NOTA

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2-2x+12 & x-2 \\ \hline \ominus\ x^3-2x^2 & x^2-2x-6 \\ \hline \quad -2x^2-2x+12 & \\ \ominus\ -2x^2+4x & \\ \hline \quad\quad -6x+12 & \\ \ominus\ \ -6x+12 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Busco las raíces de $x^2-2x-6$.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4-(4\cdot(-6))}}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{7}}{\cancel{2}}$$

$x_1 = 1+\sqrt{7}$

$x_2 = 1-\sqrt{7}$

Entonces, $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-1-\sqrt{7}\right)$

$$\left(x-1+\sqrt{7}\right)\left(x-2\right)$$

Esa es su factorización $\in \mathbb{C}[x]$, ya que son todos polinomios de grado 1 y por lo tanto irreducibles.

- en $\mathbb{R}[x]$: $f = (x^2+x+1)(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7})(x-2)$

ya que esto compuesto por polinomios de grado 1 y $x^2+x+1$ es irreducible en $\mathbb{R}$ ya que sus raíces son complejas.

- en $\mathbb{Q}[x]$: $f = (x^2+x+1)(x^2-2x-6)(x-2)$

ya que esto compuesto por un polinomio de grado 1, $x^2+x+1$ tiene raíces complejas y $x^2-2x-6$ tiene raíces reales.