② Probar que $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

x Inducción:

- Caso Base: $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \checkmark \text{ cumple.}$$

ok

- Paso inductivo:

- Hi: $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$ - qvq: $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \overset{Hi}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq (*)$$

$$\geq \frac{n}{2} + \left[\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}}\right]^{♥} =$$

(*) $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^n+1} \geq \boxed{\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{n+1}}}$

$$= \frac{n}{2} + \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2} \quad \checkmark$$

cumple

♥ Esta sumatoria me da 2^n números porque voy desde $2^n + 1$ hasta el 2^{n+1}

$\Rightarrow$ Visto el caso base y el paso inductivo

$$\therefore \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}.$$

Bien

(1) $\sim$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(n,m)\sim(n',m') \Leftrightarrow n+m' = n'+m$

(a) si $\sim$ es de equivalencia, debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.

• <u>Reflexiva:</u> $x \sim x$.

$(n,m)\sim(n',m') \Leftrightarrow n+m' = n'+m$ ✓ (la suma es conmutativa).

$\Rightarrow \sim$ es reflexiva. ok

• <u>Simétrica:</u> $x\sim y \Leftrightarrow y \sim x$.

$(n,m)\sim(n',m') \Leftrightarrow n+m' = n'+m$

$(n',m')\sim(n,m) \Leftrightarrow n'+m = m'+n$

$\Big\} \Leftrightarrow$ ✓.

$\Rightarrow \sim$ es simétrica. ok

• <u>Transitiva:</u> $x\sim y,\ y\sim z \Rightarrow x \sim z$.

$(n,m)\sim(n',m') \Leftrightarrow n+m' = n'+m$ (1)

$(n',m')\sim(a,b) \Leftrightarrow n'+b = a+m'$ (2)

$(n,m)\sim(a,b) \Leftrightarrow n+b = a+m$ (3)

$\Rightarrow$)

en (1): $n' = n+m'-m$

en (2): $b = a+m'-n' \overset{(1)}{=} a+\cancel{m'}-n-\cancel{m'}+m$

en (3): $\underbrace{\cancel{n}+a-\cancel{n}+m}_{n+b} = a+m$

Efectivamente $n+b = a+m$.

(⇐)

en (1): $m' = n' + m - n$

en (2): $a = n' + b - m' \overset{(1)}{=} \cancel{n'} + b - \cancel{n'} - m + n$

en (3): $n + b = \underbrace{b - \cancel{m} + n + \cancel{m}}_{a+m}$

Efectivamente $n + b = a + m$

$\Rightarrow \sim$ es transitiva. ok, pero no hace falta probar el si y solo si porque es la definición

$\therefore$ Vimos que $\sim$ es reflexiva, que es simétrica y que es transitiva, entonces queda probado que $\sim$ es de equivalencia.

(b) Dados (n,m) y (n',m') siempre existe (x,y) tal que: $(n+x, m+y) \sim (n',m') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n + x + m' = n' + m + y$.

Me defino el par $(c,d) = (n+x, m+y)$

$\Rightarrow$ Tengo $(c,d) \sim (n',m') \Leftrightarrow c + m' = n' + d$.

• Como ya vimos que $\sim$ es de equivalencia, (*)

no resuelve

$\cancel{(n,m) \sim (n',m') \Leftrightarrow n + m' = n' + m}$ (1)

$\cancel{(x,y) \sim (n',m') \Leftrightarrow x + m' = n' + y}$ (2)

$\cancel{(c,d) \sim (n',m') \Leftrightarrow c + m' = n' + d}$ (3)

(*) debería cumplirse por transitividad p[illegible] creo que hice mal la cuenta y no llego con el tiempo así que no sé

Regular-

(5) $\underbrace{(17^n + 3^n : 17^{n+1} + 3^{n+1})}_{=d}, \; n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} d \mid 17^n + 3^n \\ d \mid 17^{n+1} + 3^{n+1} \end{cases} \overset{\times 17}{\Rightarrow} \begin{cases} d \mid 17^{n+1} + 17\cdot 3^n \\ d \mid 17^{n+1} + 3^{n+1} \end{cases}$$

Resto

$$\Rightarrow d \mid \cancel{17\cdot 17^n} + 17\cdot 3^n - \cancel{17\cdot 17^n} - 3\cdot 3^n \Rightarrow d \mid 14\cdot 3^n$$

$$\begin{cases} d \mid 17^n + 3^n \\ d \mid 17^{n+1} + 3^{n+1} \end{cases} \overset{\times 3}{\Rightarrow} \begin{cases} d \mid 3\cdot 17^n + 3^{n+1} \\ d \mid 17^{n+1} + 3^{n+1} \end{cases}$$

Resto

$$\Rightarrow d \mid 3\cdot 17^n + \cancel{3\cdot 3^n} - 17\cdot 17^n - \cancel{3\cdot 3^n} \Rightarrow d \mid -14\cdot 17^n$$

$$\Rightarrow d \mid 14\cdot 17^n$$

$$\begin{cases} d \mid 14\cdot 3^n \\ d \mid 14\cdot 17^n \end{cases} \Rightarrow d \mid 14\cdot 3^n + 14\cdot 17^n = 14(3^n + 17^n)$$

por consigna, ya sé que $d \mid 3^n + 17^n$

entonces ahora estoy encontrando que $d \mid 14$.

$\Rightarrow d \in \{1, 2, 7, 14\}$.

Busco valores:

si $n=1$: $(17^1 + 3^1 : 17^2 + 3^2) = (20 : 298) = 2$ ✓.

~~si $n=2$: $(17^2 + 3^2 : 17^3 + 3^3) = (298 : 4940) = 2$~~

~~si $n=3$: $(17^3 + 3^3 : 17^4 + 3^4) = (4940 : 83602) = 2$~~

~~si $n=4$: $(17^4 + 3^4 : 17^5 + 3^5) = (83602$~~

como 17 y 3 son impares, 17^n es impar y 3^n es impar $\Rightarrow$ impar + impar = par.

Entonces siempre voy a tener (par : par) y en este caso, independientemente de esos pares, mi $d=1$ y $d=7$ no me van a servir. ok

En consecuencia de esto, $d=14$ tampoco me sirve porque para que un número sea divisible por 14, necesito que sea divisible por 2 y por 7 ~~[illegible]~~

Esto no necesariamente es así. Vos viste que 2|d porque son ambos pares. Además tendrías que ver que 7 no divide en simultáneo a las dos partes.

Como el 7 no me sirve $\Rightarrow$ el 14 tampoco

Rta: $d=2$, un posible n es 1.

R+

3 UNIVERSIDADES, 2 letras entre las S.

- Se repiten la i, D, E y S dos veces cada una.
- Total de anagramas: $\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{13!}{16}$.
- quiero 2 letras entre las S.

$\underbrace{S\ \underline{\text{2 letras}}\ S}_{\text{Bloque}}$ | i i E E D D _ _ _ ~~[illegible]~~

Puedo mover mi bloque de 10 maneras ~~[illegible]~~

¿Por qué?

- Si tengo las S fijas, me quedan 11 letras que las puedo mover de $\frac{11!}{8}$ maneras.

RTA: $10 \cdot \frac{99!}{8}$. Bien

(4) $f: \underbrace{\{1,2,3,\dots,80\}}_{A} \to \underbrace{\{1,2,3,\dots,100\}}_{B}$ inyectivas.

tal que $f(80) \in \{1, 50, 75\}$.

y que $n \equiv 0\,(7) \Rightarrow f(n) \equiv 0\,(7)$.

• Para inyectividad: $\frac{100!}{(100-80)!} = \frac{100!}{20!}$

• Para que $f(80) \in \{1, 50, 75\}$

Tengo las combinaciones:

$f(80) = 1$ o $f(80) = 50$ o $f(80) = 75$.

Tengo 3 elementos de B para asignar 1 de esos a 1 de A $\Rightarrow$ tengo $\binom{3}{1} = 3$ formas de hacerlo.

• Para que $n \equiv 0\,(7)$ y $f(n) \equiv 0\,(7)$.

- Tengo que agarrar $n = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq n \leq 80$.

$\Rightarrow n \in \underbrace{\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77\}}_{\text{elementos de A}}$

- Tengo que agarrar $f(n) = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$ ~~y 1 ≤ f(n)~~
y $1 \leq f(n) \leq 100$.

$\Rightarrow f(m) \in \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70,$
$77, 84, 91, 98\}$ elementos de B

Entonces tengo 11 elementos de A y 14 elementos de B para usar.

$\Rightarrow$ tengo $\binom{14}{11} = 364 \cdot 11!$ $\circ$ porque me importa el orden.

- Para mantener la inyectividad: $\dfrac{(100-12)!}{((100-12)-(80-12))!}$

RTA: Hay $3 \cdot 364 \cdot 11! \cdot \dfrac{88!}{20!}$ funciones.

Bien

Grilla
Ej 1: R-
Ej 2: B
Ej 3: B
Ej 4: B
Ej 5: R+
Aprobado