Probabilidad y Estadística (C) - Final - 13/12/2018

Examen Final. (13/12/18)

Criterio de aprobación: El examen consta de dos partes A y B. En la Parte A, cada ejercicio resuelto correctamente suma un punto. En la Parte B, el ejercicio suma 6 puntos. El final se aprueba con 6 puntos y NO podrá sumar más de 5 puntos de cada parte

Parte A

1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/3 & -1 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases} \tag{1}$$

a) Completar:

$P(-1 < X \leq 1) = \ldots$ $\qquad$ $P(-1 \leq X \leq 1) = \ldots$

b) Calcular la función de probabilidad puntual de $X, \mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{V}(X)$

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{0<x<y}$$

¿Qué distribución tiene $X|_{Y=y}$, para $y > 0$?

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con función de distribución exponencial de parámetro $\lambda = 2$. Indique el valor del siguiente límite en probabilidad:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq 1\}} = \ldots$$

4. Sea $(S_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $S_n \sim \mathcal{B}(n, 0{,}3)$. Indique el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - 0{,}3n}{\sqrt{0{,}3(1-0{,}3)n}} \leq 1{,}64 \right) = \ldots$$

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $N(\mu, \sigma_o^2)$, con σ_o^2 conocida.

a) Halle $\widehat{\mu}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de μ

b) ¿Cuál es la distribución de $\widehat{\mu}_n$?

c) Determine si el estimador $\widehat{\mu}_n$ es consistente. Justifique todas sus respuestas.

6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución Bernoulli de parámetro p. Utilizando la fórmula de intervalos de confianza asintótico de nivel $1-\alpha$, con una muestra de tamaño $n = 100$ se reportó el intervalo $(0{,}7, 0{,}9)$. Determine el valor de α utilizado.

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$.

a) Proponga una región de rechazo de nivel $\alpha = 0{,}05$ para

$$H_0 = \{\mu = 5\} \qquad vs. \qquad H_1 = \{\mu > 5\}$$

b) Determine cuan grande debe ser n para que la probabilidad de no rechazar H_0 si $\mu = 6$ sea a lo sumo 0,1

Parte B

1. Enuncie y demuestre el Teorema de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes. Incluya previamente todas las definiciones y conceptos que considere pertinentes.

2. Proponga un ejercicio (escriba el enunciado) cuya resolución requiera invocar el Teorema de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes. No incluya la resolución del ejercicio.