1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Examen Final de ANALISIS I- Matemática 1 - Análisis Matemático 1 - Análisis II(C)

11/3/2011

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable y estrictamente creciente, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   b) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ para todo intervalo $[a,b] \subset [0,1]$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.
   c) Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ continua. Si la integral impropia $\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge, entonces $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-2xy+y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Probar que para cualquier curva $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 [donde $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$] tal que $\alpha(0) = (1,0)$ y $\alpha(t) \neq (1,0)$ para todo $t \neq 0$, la derivada $(f \circ \alpha)'(0)$ existe; pero que sin embargo f no es diferenciable en el punto $(1,0)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, $D = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \leq 1\}$ el disco unitario cerrado. Supongamos que $f_{/D}$ (f restringida a D) tiene un máximo absoluto en el punto $(1,0)$. Probar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \geq 0$$

4. Sean $p_1 = (1,0)$, $p_2 = (2,3)$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supongamos que f se anula solo en estos dos puntos, o sea:

$$\{p \in \mathbb{R}^2 : f(p) = 0\} = \{p_1, p_2\}.$$

Probar que $\nabla f(p_1) = \nabla f(p_2) = (0,0)$.

5. Sea $U : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la función $U(x,y) = log(x^2+y^2)$. Calcular el valor de la integral

$$I = \int\int_C \|\nabla(U)\|^2\, dxdy,$$

siendo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \|(x,y)\| \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$.

Justifique todas sus respuestas.

HOJA Nº $\boxed{11/03/11}$

FECHA

(11/03/11) 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - 2xy + y}{(x-1)^2 + y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}^1 [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow$

$\alpha(0) = (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \overset{!}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,0) - \cancel{f(1,0)}}{t} \overset{!}{=} \boxed{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \text{- - - - -} \overset{!}{=} \boxed{0}$$

$$(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f(1,0) = 0$$

$$(f(\alpha(t)))'(0) = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0)$$

$$= f'(1,0) \cdot \alpha'(0)$$

$$= (0,0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1'(0) \\ \alpha_2'(0) \end{pmatrix} = \boxed{0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{F(x,y) - \overset{0}{F(1,0)} - x\,\overset{0}{\cancel{\partial}} - y\,\overset{0}{\partial} \ldots}{\|(x,y) - (1,0)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y - 2xy + y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} \neq 0 \quad \text{por curvas}$$

$(0,t)$

$$\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \xrightarrow[L'H]{} \infty$$

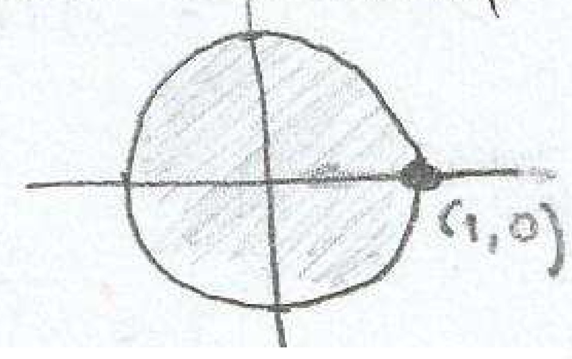
NOTA

11|03|11

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|x,y\| \leq 1\}$

Supongamos $f|_D$ tiene un máximo absoluto en $(1,0)$

Probar $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \geq 0$



Supongo $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) < 0$

$f \circ (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ tiene un máx en $(1,0)$

$f(\cos t, \operatorname{sen} t)' = f'(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \cdot (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) = 0$

11|3|11

$= \left(f_x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), f_y(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\right) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = 0$

$= (f_x(1,0), f_y(1,0)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{f_y = 0}$

~~$= f_x(\cos t, \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + f_y(\cos t, \operatorname{sen} t)(\cos t) = 0$~~

~~$\cos t \cdot f_y(\cos t, \operatorname{sen} t) = \operatorname{sen} t \; \underbrace{f_x(\cos t, \operatorname{sen} t)}_{<0}$~~ $(t=0)$

$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ $g = x^2+y^2-1$

$(f_x(1,0), f_y(1,0)) = \lambda \cdot (2x, 2y)_{(1,0)}$

$\to f_x(1,0) = \lambda \cdot 2$

$\to f_y(1,0) = 2\lambda$

$\Downarrow$

1. $f_y(1,0) = 0 \Rightarrow 0 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow \boxed{f_x(1,0) = 0 \geq 0}$

---

④ $P_1 = (1,0)$ $f(1,0) = 0$

$P_2 = (2,3)$ $f(2,3) = 0$

$f(x,y) \neq 0$ $(x,y) \neq (1,0)$, $(x,y) \neq (2,3)$

$\Rightarrow$ $\nabla f(1,0) = 0$ (x_0, y_0)

$\nabla f(2,3) = 0$

La superficie $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} = \{(1,0), (2,3)\}$.

Supongo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$

Entonces $f \in C^1$, S es una curva de nivel y $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$

Entonces por TFI, $\exists \; \underset{\text{Abierto}}{J \subseteq \mathbb{R}}$, $\phi(y): J \to \mathbb{R}$ y $B_r(x_0,y_0)$ tal que

$B_r(x_0,y_0) \cap S = Gr(\phi)$ $(\phi(y), y)$

$\phi: \{|y - P_2| < \varepsilon_2\} \to \{|x - P_1| < \varepsilon_1\}$

$B_r(x_0,y_0) \cap S = (\phi(y), y)$ $y \in (-\delta, \delta)$

$\#(B_r(x_0,y_0) \cap S) \leq \min\{\# B_r, \# S\} = \min\{\infty, 2\} = 2 \neq \infty$

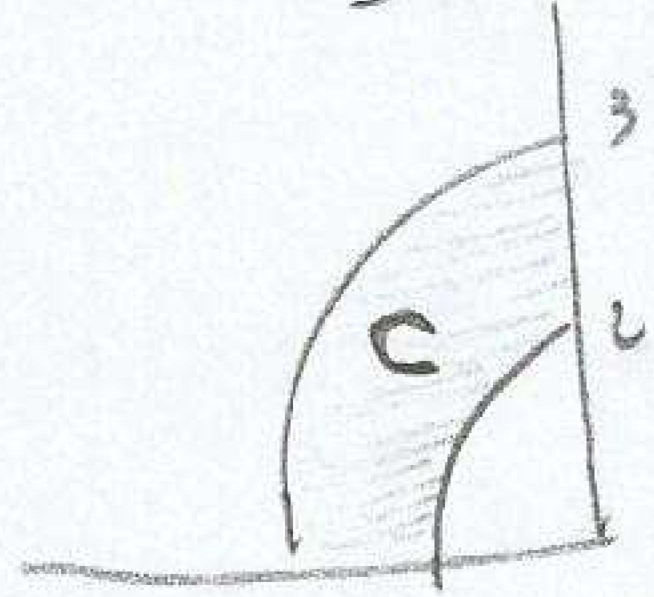
✓

⑤ $U: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$U(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 2 \le \|(x,y)\| \le 3 \\ x \le 0 \\ y \ge 0 \end{array} \right\}$

$\boxed{11/03/11}$



$$I = \iint_C \|\nabla(U)\|^2 \, dx \, dy$$

$$= \iint \left\| \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x , \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y \right\|^2 dx \, dy$$

$$= \iint \frac{4x^2+4y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \, dy$$

$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

$2 \le r \le 3$

$J = r.$

$\boxed{\begin{array}{l} x = r \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{array}}$

$$= \iint 4 \frac{\cancel{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} \, dx \, dy = \iint \frac{4}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_2^3 \frac{4r}{r^2} \, dr \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4 \int_2^3 \frac{1}{r} \, dr \, d\theta = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(r) \Big|_2^3$$

$$= 2 \frac{\pi}{2} (\ln(3) - \ln(2))$$

feo