PGROISMA @ DM.UBA.AR

0,95

Listado 3

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(24/02/06)

NOMBRE Y APELLIDO:
N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:
e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

---

1. **(25 puntos)** Sea X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

   (a) Deducir la distribución de aX cuando a es una constante real positiva.

   (b) Calcular la $E(X^r)$ para $r > 0$.

   ver prop

   (c) Deducir la esperanza y la varianza de X

   (d) Demostrar que si $Z \sim N(0,1)$, entonces Z^2 tiene distribución Gamma, ¿de qué parámetros?

2. **(25 puntos)** Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo con densidad

   opuesto

$$f_{XY} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   (a) Hallar $E(\sqrt{X^2+Y^2})$.

   (b) Hallar la región donde la función $f_X(x) f_Y(y)$ es no nula.

   (c) Decidir si X e Y son independientes.

3. **(25 puntos)** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de variables con distribución $U(-\theta, \theta)$.

   (a) Calcular el primer y segundo momento poblacional de la distribución $U(-\theta, \theta)$.

   (b) Hallar el estimador de momentos de θ basado en la muestra dada.

   (c) Definir la propiedad de consistencia de un estimador genérico T del parámetro θ.

   (d) Verificar si el estimador hallado en b) es consistente. Enuncie las propiedades que utiliza.

4. **(25 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $P(\lambda)$, cada una de las cuales mide el número de señales que emite una fuente en un período de un minuto. Asimismo, asumamos que el tamaño muestral, n, es tan grande como se desee.

   (a) Deducir un intervalo de confianza de nivel aproximado $1 - \alpha$ para λ basándose en la muestra dada.

   (b) Si para una muestra de 50 períodos de un minuto de duración se observó en total 48 señales emitidas, calcular un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.90 para λ.

EX. FINAL 24/02/06

(1). a) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

Se quiere conocer la dist. de aX, siendo $a \in \mathbb{R}_{>0}$

$$F_{aX}(t) = P(aX \leq t) \underset{a>0}{=} P\left(X \leq \frac{t}{a}\right) = F_X\left(\frac{t}{a}\right)$$

$F_{aX}(t) = F_X(t/a)$ derivando resulta

$$\frac{\partial F_{aX}(t)}{\partial t} = \frac{\partial F_X(t/a)}{\partial t}$$

$$f_{aX}(t) = f_X(t/a)\,\frac{1}{a}$$

$$f_{aX}(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda\frac{t}{a}} \cdot \frac{1}{a} \cdot I_{(0,+\infty)}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{t^{\alpha-1}}{a^\alpha}\, e^{-\frac{\lambda}{a}t}\, I_{(0,+\infty)}(t) \quad \text{(pues } a>0\text{)}$$

$$= \frac{(\lambda/a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, t^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{\lambda}{a}\right)\cdot t}\, I_{(0,+\infty)}(t)$$

$$\Rightarrow aX \sim \Gamma(\alpha, \lambda/a)$$

b) $E(X^r)$ para $r>0$

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x) \, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{r+\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} \, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha \cdot \lambda^r \, \Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha) \, \lambda^r \, \Gamma(r+\alpha)} \cdot x^{r+\alpha-1} e^{-\lambda x} \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^r} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha+r}}{\Gamma(r+\alpha)} x^{r+\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} \, dx}_{=1} =$$

$=1$ pues es la integral de la densidad de una dist. $\Gamma(r+\alpha, \lambda)$ en el intervalo $(0,+\infty)$

$$= \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^r}$$

c) $$E(X) \underset{r=1}{=} \frac{\Gamma(\overbrace{1+\alpha}^{>1})}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda} = \frac{\alpha\cdot\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda} = \boxed{\frac{\alpha}{\lambda}}$$

Prop: Si $\alpha>1 \Longrightarrow \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$

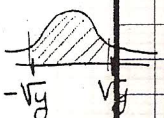
$$E(X^2) = \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^2} = \frac{(1+\alpha)\cdot\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^2} = \frac{(1+\alpha)\cdot\alpha\cdot\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\cdot\lambda^2}$$

$$= \frac{(1+\alpha)\cdot\alpha}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(1+\alpha)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha+\alpha^2-\alpha^2}{\lambda^2} =$$

$$= \boxed{\frac{\alpha}{\lambda^2}}$$

d) $Z \sim N(0,1) \Longrightarrow Z^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$



$$F_{Z^2}(y) = P(Z^2 \le y) \underset{\downarrow}{=} P(|Z| \le \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y})$$

$$= F_Z(\sqrt{y}) - F_Z(-\sqrt{y}) = 1 \overset{y>0}{-} 2P(Z > \sqrt{y}) = 1 - 2(1 - F_Z(\sqrt{y})) =$$

$$= 2F_Z(\sqrt{y}) - 1$$

$$f_{Z^2}(y) = 2 f_Z(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = f_Z(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

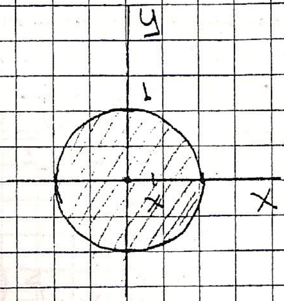
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{y}} I_{(0,+\infty)}(y) =$$

$$= \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} I_{(0,+\infty)}(y)$$

pues $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (ver teórica)

(2)

$$f_{XY} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } \underbrace{0 < x^2+y^2 \le 1}_{\text{región } A} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



a) $E(\sqrt{x^2+y^2})$

$$E(\sqrt{x^2+y^2}) = \iint_A \cancel{\sqrt{x^2+y^2}} \, \frac{1}{2\pi \cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} \, dx\,dy$$

$$= \iint_A \frac{1}{2\pi} \, dx\,dy =$$

$-1 \le x \le 1$

$y^2 = 1-x^2$

$|y| = \sqrt{1-x^2}$

$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2\pi} \, dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \left(y \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx =$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \text{arc sen } x\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\left(\underbrace{\text{arc sen } 1}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\text{arc sen}(-1)}_{-\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\pi = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq 0 \iff f_X(x)\neq 0$ y $f_Y(y)\neq 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy =$$

$-1\leq x\leq -1$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$

$\ln(y)\cdot\ln(\sqrt{x^2+y^2})$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\left(\sqrt{1-x^2}+1\right) - \ln\left(-\sqrt{1-x^2}+1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{-\sqrt{1-x^2}+1}\right]$$

$f_X(x) = 0 \iff x = 1$, $x = -1$

$\boxed{f_X \text{ es no nula en } (-1,0)\cup(0,1)}$

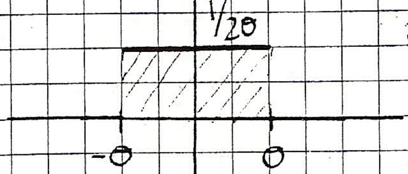
Dom $f_X = \mathbb{R}-\{0\}$ ó $x < -1$, $x > 1$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\, dx =$$ misma cuenta anterior

$f_Y(y)$ es no nula en $(-1,0)\cup(0,1)$

c) X e Y no son indep pues

3 $X \sim U[-\theta,\theta]$



a) $$E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\theta}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-\theta}^{\theta}\right) = \boxed{0}$$

$$E(X^2) = \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \frac{1}{2\theta}\, dx = \frac{1}{2\theta}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-\theta}^{\theta}\right) = \frac{1}{2\theta}\left(\frac{\theta^3}{3}+\frac{\theta^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\theta}\cdot\frac{2\theta^3}{3} = \boxed{\frac{\theta^2}{3}}$$

b) $$\frac{\sum X_i^2}{m} = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \sqrt{3 \cdot \frac{\sum X_i^2}{m}}$$

c) $\hat{\theta}$ es un estim consistente de θ $\Leftrightarrow$

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$$

Por la LGN $$\frac{\sum X_i^2}{m} \xrightarrow{P} E(X_1^2) = \frac{\theta^2}{3}$$

luego $$3 \cdot \frac{\sum X_i^2}{m} \xrightarrow{P} \theta^2$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{\sum X_i^2}{m}} \xrightarrow{P} \theta$$

$\Rightarrow$ el estim hallado es consistente

Propiedades

• Si $X_m \xrightarrow{P} a$

$$k \cdot X_m \xrightarrow{P} k a$$

y si g es continua en a

$$g(X_m) \xrightarrow{P} g(a)$$

4)

a) $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ para $1 \leq i \leq n$.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$$

luego, por el T.C. Límite

$$(1) \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \text{ para } n$$

suf. grande

$\hat{\lambda} = \overline{X}$ es un estim. consistente de λ, pues

$$\frac{\sum X_i}{n} \xrightarrow{P} \lambda \quad \text{por la LGN}.$$

$$\hat{\lambda} = \overline{X} \xrightarrow{P} \lambda$$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{y luego} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \xrightarrow{P} 1$$

de (1) y (2) sale que

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \cdot \frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n}\,\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

es decir

$$\frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n}\,\sqrt{\overline{X}}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sum x_i - n\lambda}{\sqrt{n}\,\sqrt{\bar{x}}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}\cdot\sqrt{\bar{x}} - \sum x_i \le -n\lambda \le z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}\cdot\sqrt{\bar{x}} - \sum x_i\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}\cdot\sqrt{\bar{x}} + \sum x_i}{n} \le \lambda \le \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{n}\,\sqrt{\bar{x}} + \sum x_i}{n}\right) \simeq 1-\alpha$$

Como $\sqrt{n}\cdot\sqrt{\bar{x}} = \cancel{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{\sum x_i}}{\cancel{\sqrt{n}}} = \sqrt{\sum x_i}$

$$I = \left(\frac{-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sum x_i} + \sum x_i}{n} \; ; \; \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sum x_i} + \sum x_i}{n}\right)$$

es un intervalo de confianza de nivel aprox. $1-\alpha$ para λ

b) $n = 50$ $\quad \sum x_i = 48$ $\quad 1-\alpha = 0{,}90$

$\alpha = 0{,}10$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}65$

$$I = \left(\frac{-1{,}65\sqrt{48} + 48}{50} \; , \; \frac{1{,}65\sqrt{48} + 48}{50}\right) =$$

$$= \left(0{,}731 \; ; \; 1{,}189\right)$$