
Álgebra I

1er. cuatrimestre 2021

Primer Parcial - 15/05/2021

Justifique todas sus respuestas.

Entregue todas las hojas escaneadas y en orden.

*En la primera hoja coloque su nombre completo, número de libreta, carrera y **turno** de práctica al que está inscripto en el SIU Guaraní.*

Ejercicio 1:

Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\} : f \text{ es una función biyectiva}\}$, y sea \mathcal{R} la relación en \mathcal{F} definida por

$$f \mathcal{R} g \iff \exists n \in \{1, \dots, 10\} : f(n) = 1 \text{ y } g(n) = 1.$$

- (a) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- (b) Sea $\text{Id} : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$ la función Identidad, o sea $\text{Id}(n) = n, \forall n \in \{1, \dots, 10\}$. Calcular el cardinal del conjunto

$$\{f \in \mathcal{F} : f(\{1, 2, 3\}) \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } f \mathcal{R} \text{Id}\}.$$

Ejercicio 2:

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números enteros definida recursivamente por:

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n + a_k}{n + k + 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Probar que $a_n \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3:

- (a) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3 \mid 3 \cdot 5^n - 31n^2 + 28$.
- (b) Probar que $3 \cdot 5^n - 31n^2 + 28$ es divisible por 3 o por 31 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos tales que $5 \mid a$ y $(a : b) = 6$. Determinar los posibles valores de

$$(2a^2 - b^2 : a^2 - 3b^2).$$