# FINAL DE ÁLGEBRA I
# (20-07-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

*"Juegas todos los días con la luz del universo."*
*Pablo Neruda*

## Ejercicio 1

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. Calcular la cantidad de funciones $f : A \to B$ que verifican simultáneamente:

- Hay exactamente tres elementos $m \in A$ tales que $f(m) = a$.
- Hay exactamente dos elementos $n \in A$ tales que $f(n) = b$.

## Resolución:

La cantidad de formas distintas de enviar exactamente tres elementos de $A$ al elemento $a$ del conjunto $B$ es $\binom{12}{3}$ (ya que de los doce elegimos tres cuya imagen será $a$). Por cada una de ellas, hay $\binom{9}{2}$ maneras diferentes de enviar exactamente dos de los nueve elementos restantes de $A$ al elemento $b$ de $B$. A su vez, por cada una de ellas, cada uno de los siete elementos restantes de $A$ puede ser enviado a $c$, $d$ o $e$, y por lo tanto $3^7$ es la cantidad de posibilidades para esos siete elementos. Concluimos así que la respuesta es

$$\binom{12}{3}\binom{9}{2}3^7.$$

$\blacksquare$

# Ejercicio 2

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 30 \;\; y \;\; a_n = 2^n a_{n-1} + 5^n a_{n-2} \;\; \forall\, n \geq 3.$$

Probar que $(100 : a_n) = 10$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

# Resolución:

Notemos que, como $100 = 2^2 \cdot 5^2$ y $10 = 2 \cdot 5$, resulta

$$(100 : a_n) = 10 \iff 2 \mid a_n,\; 4 \nmid a_n,\; 5 \mid a_n \;\; y \;\; 25 \nmid a_n.$$

Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n):\; 2 \mid a_n,\; 4 \nmid a_n,\; 5 \mid a_n \;\; y \;\; 25 \nmid a_n.$$

Veamos que vale $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ se tiene que $a_1 = 10$, y por lo tanto $2 \mid a_1$, $4 \nmid a_1$, $5 \mid a_1$ y $25 \nmid a_1$.

Si $n = 2$ se tiene que $a_2 = 30$, y por lo tanto $2 \mid a_2$, $4 \nmid a_2$, $5 \mid a_2$ y $25 \nmid a_2$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Supongamos verdaderas $P(n-2)$ y $P(n-1)$, y veamos que lo es $P(n)$.

En primer lugar tenemos que

$$a_n = 2^n a_{n-1} + 5^n a_{n-2} \equiv 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \equiv 0 \; (mod\ 2)$$

(pues por H. I., $2 \mid a_{n-2}$ y $2 \mid a_{n-1}$), y por lo tanto $2 \mid a_n$.

En segundo lugar,

$$a_n = 2^n a_{n-1} + 5^n a_{n-2} \equiv 0 \cdot a_{n-1} + 1 \cdot a_{n-2} \equiv a_{n-2} \; (mod\ 4)$$

(donde usamos que $4 \mid 2^n$ por ser $n \geq 3$), y por lo tanto $4 \nmid a_n$ pues por H. I. $4 \nmid a_{n-2}$.

En tercer lugar,

$$a_n = 2^n a_{n-1} + 5^n a_{n-2} \equiv 2^n \cdot 0 + 0 \cdot 0 \equiv 0 \; (mod\ 5)$$

(pues por H. I., $5 \mid a_{n-2}$ y $5 \mid a_{n-1}$), y por lo tanto $5 \mid a_n$.

En cuarto y último lugar,

$$a_n = 2^n a_{n-1} + 5^n a_{n-2} \equiv 2^n a_{n-1} + 0 \cdot a_{n-2} \equiv 2^n a_{n-1} \ (mod\ 25)$$

(donde usamos que $25 \mid 5^n$ por ser $n \geq 3$), y por lo tanto $25 \nmid a_n$ pues por H. I. $25 \nmid a_{n-1}$.

Probados los casos base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

# Ejercicio 3

Para cada $k \in \mathbb{N}$ hallar el resto de

$$2^{3^{k!}}$$

en la división por 23.

# Resolución:

Como $2 \perp 23$ y 23 es primo, por el PTF resulta

$$2^{3^{k!}} \equiv 2^{r_{22}(3^{k!})} \ (mod\ 23).$$

Como $22 = 2 \cdot 11$ y $2 \perp 11$,

$$X \equiv 3^{k!} \ (mod\ 22) \ \Leftrightarrow \ X \equiv 3^{k!} \ (mod\ 2) \ y \ X \equiv 3^{k!} \ (mod\ 11).$$

Para la división por 2 tenemos que

$$X \equiv 3^{k!} \equiv 1^{k!} \equiv 1 \ (mod\ 2)$$

, así que 1 es el resto de $3^{k!}$ en al división por 2 para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para la división por 11 usamos el PTF, pues $3 \perp 11$ y 11 es primo, resultando

$$X \equiv 3^{k!} \equiv 3^{r_{10}(k!)} \ (mod\ 11).$$

Si $k = 1$,

$$X \equiv 3^{r_{10}(1!)} \equiv 3^1 \equiv 3 \ (mod\ 11).$$

Si $k = 2$,

$$X \equiv 3^{r_{10}(2!)} \equiv 3^2 \equiv 9\ (mod\ 11).$$

Si $k = 3$

$$X \equiv 3^{r_{10}(3!)} \equiv 3^6 \equiv 3\ (mod\ 11).$$

Si $k = 4$,

$$X \equiv 3^{r_{10}(4!)} \equiv 3^4 \equiv 4\ (mod\ 11).$$

Si $k \geq 5$,

$$X \equiv 3^{r_{10}(k!)} \equiv 3^0 \equiv 1\ (mod\ 11).$$

Entonces, el resto en la división de $3^{k!}$ por 11 es 3 si $k = 1$ o $k = 3$, 9 si $k = 2$, 4 si $k = 4$ y 1 si $k \geq 5$.

Ahora tenemos que resolver los cuatro sistemas de dos ecuaciones de congruencia cada uno que quedaron (uno por cada resto en la división de $3^{k!}$ por 11).

- $k = 1$ o $k = 3$:

$$X \equiv 3^{k!}\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 3^{k!}\ (mod\ 11) \Leftrightarrow\ X \equiv 1\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 3\ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow\ X \equiv 3\ (mod\ 22) \Rightarrow 2^{3^{k!}} \equiv 2^{r_{22}(3^{k!})} \equiv 2^3 \equiv 8\ (mod\ 23).$$

- $k = 2$:

$$X \equiv 3^{2!}\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 3^{2!}\ (mod\ 11) \Leftrightarrow\ X \equiv 1\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 9\ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow\ X \equiv 9\ (mod\ 22) \Rightarrow 2^{3^{2!}} \equiv 2^{r_{22}(3^{2!})} \equiv 2^9 \equiv 6\ (mod\ 23).$$

- $k = 4$:

$$X \equiv 3^{4!}\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 3^{4!}\ (mod\ 11) \Leftrightarrow\ X \equiv 1\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 4\ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow\ X \equiv 15\ (mod\ 22) \Rightarrow 2^{3^{4!}} \equiv 2^{r_{22}(3^{4!})} \equiv 2^{15} \equiv 16\ (mod\ 23).$$

- $k \geq 5$:

$$X \equiv 3^{k!}\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 3^{k!}\ (mod\ 11) \Leftrightarrow\ X \equiv 1\ (mod\ 2)\ y\ X \equiv 1\ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow\ X \equiv 1\ (mod\ 22) \Rightarrow 2^{3^{k!}} \equiv 2^{r_{22}(3^{k!})} \equiv 2^1 \equiv 2\ (mod\ 23).$$

Se concluye así que el resto en la división de $2^{3^{k!}}$ por 23 es 8 si $k = 1$ o $k = 3$, 6 si $k = 2$, 16 si $k = 4$ y 2 si $k \geq 5$.

■

# Ejercicio 4

Factorizar en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$X^6 - 6X^5 + 14X^4 - 8X^3 - 14X^2 + 10X + 7$$

sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 1 y cuyo producto es $-1$, que además son múltiples.

# Resolución:

Sean $f := X^6 - 6X^5 + 14X^4 - 8X^3 - 14X^2 + 10X + 7$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, $\alpha + \beta = 1$ y $\alpha \cdot \beta = -1$. Luego,

$$\alpha \cdot \beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{\alpha} \Rightarrow \alpha - \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\alpha - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0,$$

lo que implica que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, o $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y por lo tanto, como además tales raíces son múltiples, se tiene que

$$\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \mid f$$

, y entonces

$$(X^2 - X - 1)^2 \mid f.$$

Haciendo tal división obtenemos que

$$f = (X^2 - X - 1)^2 (X^2 - 4X + 7)$$

, y como $X^2 - 4X + 7 = (X - (2 + \sqrt{3}i))(X - (2 - \sqrt{3}i))$, las factorizaciones de $f$ son:

$$(X^2 - X - 1)^2 (X^2 - 4X + 7) \ en \ \mathbb{Q}[X],$$

$$\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 (X^2 - 4X + 7) \ en \ \mathbb{R}[X] \ y$$

$$\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 (X - (2 + \sqrt{3}i))(X - (2 - \sqrt{3}i)) \ en \ \mathbb{C}[X].$$

■