Álgebra I - Curso de Verano 2018

Primer Parcial (22/02/2018)

1. Sea $P = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ el conjunto de partes de $\{1,\ldots,10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P

$$\mathbf{A}\mathcal{R}\mathbf{B} \text{ si y solo si } (\mathbf{A}\triangle\mathbf{B}) \cap \{1,2,3\} = \emptyset.$$

   a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, relación de equivalencia y/o orden. (Sugerencia: Demostrar que dados tres conjuntos D, E, F, $D\triangle E \subseteq (D\triangle F) \cup (E\triangle F)$.)

   b) Hallar todos los conjuntos $\mathbf{B} \in P$ tales que $\{1,2,3\}\mathcal{R}\mathbf{B}$.

---

2. Se define por recurrencia la sucesión $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $H_1 = 1$ y $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} H_j = (n+1)H_n - n.$$

---

3. Daniel define una función $f : \{1,2,3,\ldots,12\} \to \{1,2,3,\ldots,21\}$ que cumple simultáneamente:

   a) Es inyectiva.

   b) $21 \in \mathrm{Im}(f)$.

   c) $f(n) + n$ es par para todo $n = 1,\ldots,12$.

   ¿Cuántas posibles funciones f bajo estas condiciones puede definir Daniel?

---

4. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -1 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 4^{2n} \cdot a_n + 15^n \cdot n^{15} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

   Probar que $a_n \equiv 3^n \pmod 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

5. Determinar los valores posibles de $d = (a^2 + 3a + 2 : 3a^3 + 5a^2)$ para cada $a \in \mathbb{Z}$. Para cada uno de los valores hallados de d, exhibir un valor de a para el cual el máximo común divisor sea d.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS