Corrigió Marcos  Promociona con 10

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Segundo parcial (1/07/2023) - 1er. C. 2023

TEMA 4

| 1 (2 pts.) | 2 (3 pts.) | 3 (2,5 pts.) | 4 (2,5 pts.) | Nota |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | 10 |

Apellido: SADETAS  Nro. de libreta: 476/16  Nro de práctica: 2

Nombre: KEVIN  Carrera: CS DE DATOS

ATENCIÓN: Recuerde que para aprobar el examen debe tener dos ejercicios bien.

1. Sea $g$ una función de clase $C^2$ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(2,2)$ es

$$T_g(x,y) = -3 - x + y + y^2.$$

a) Decidir si existe el siguiente límite, y en caso afirmativo calcularlo

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{g(x,y)+3+x-y-y^2+(x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2+(y-2)^2}.$$

b) Suponiendo que $g(x,y) = e^{f(x,y)}$ con $f$ una función de clase $C^2$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ centrado en $(2,2)$.

2. Dada $f(x,y) = 4 . e^{x^2+y^2-6y}$.

a) Hallar extremos relativos y puntos silla de $f$ en $\mathbb{R}^2$.

b) Hallar, si existen, los extremos absolutos de $f$ restringidos a

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\, 2y + x^2 \leq 9\right\}.$$

3. Sea $D$ la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por las curvas $y^2 = x+5$ ; $y^2 = 7-x$.

a) Dibujar la región y calcular su área.

b) Calcular la integral

$$\iint_D \frac{xy}{2}\, dA.$$

4. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\ ,\ x \leq 0\ ,\ y \leq 0,\ z \geq 0\}$ calcular la integral triple:

$$\iiint_W \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV.$$

**Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.**

① KEVIN SABETAY

① ⓐ Por la propiedad del polinomio de Taylor puedo afirmar que:

$$g(x,y) = T_g(x,y) + R_g(x,y)$$

Ademas como $T_g$ es de orden 2 y $g$ es $C^2$

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{R_g(x,y)}{(x-2)^2+(y-2)^2} = 0$$

Ahora si, resolvamos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\overbrace{g(x,y)}^{T_g(x,y)+R_g(x,y)} + 3 + x - y - y^2 + (x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2+(y-2)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{R_g(x,y)}{(x-2)^2+(y-2)^2} + \frac{\overbrace{\cancel{(-3-x+y+y^2)}}^{T_g(x,y)} \cancel{+3+x-y-y^2} + (x-2)(y-2)^3}{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

Por álgebra de límites puedo separar la el límite de la suma como la suma de los límites. (esto vale por que uno de los dos existe)

Hago tender el $\dfrac{R_g(x,y)}{\|(x-2,y-2)\|^2}$ a 0.

Me queda:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-2)(y-2)^3}{\|(x-2,y-2)\|^2}$$

Como el numerador se va a cero más rápido que la norma cuadrada el límite va a dar cero.

Lo demuestro por Sandwich.

$$0 \leq \left| \frac{(x-2)(y-2)^3}{\|(x-2),(y-2)\|^2} - 0 \right|$$

Voy a usar

$|x-2| \leq \|(x-2,y-2)\|$

$|y-2| \leq \|(x-2,y-2)\|$

$$= \frac{|x-2|\,|y-2|^3}{\|(x-2,y-2)\|^2} \leq \frac{\|(x-2,y-2)\| \cdot \|(x-2,y-2)\|^3}{\|(x-2,y-2)\|^2}$$

$$= \underbrace{\|(x-2,y-2)\|^2}_{= g(x,y)} \xrightarrow[y\to 2]{x\to 2} 0$$

$$0 \leq \left| \frac{(x-2)(y-2)^3}{\|(x-2,y-2)\|^2} \right| \leq g(x,y)$$

$0 \xrightarrow[y\to 2]{x\to 2} 0$, $\quad \left| \frac{(x-2)(y-2)^3}{\|(x-2,y-2)\|^2} \right| \xrightarrow[y\to 2]{x\to 2} 0$, $\quad g(x,y) \xrightarrow[y\to 2]{x\to 2} 0$

① Para calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $F(x,y)$ centrado en $(2,2)$ debo hallar $F(2,2)$, $\nabla F(2,2)$ y $HF(2,2)$.

Por propiedad de Taylor se que

$$T_g(2,2) = g(2,2) \qquad \nabla T_g(2,2) = \nabla g(2,2)$$

$$HT_g(2,2) = Hg(2,2)$$

$$T_g(x,y) = -3 - x + y + y^2 \qquad T_g(2,2) = g(2,2) = -3-2+2+2^2$$

$$\boxed{g(2,2) = 1}$$

$$\nabla T_g(x,y) = (-1,\ 1+2y)$$

$$\nabla T_g(2,2) = \boxed{\nabla g(2,2) = (-1,5)}$$

$$HT_g(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = HT_g(2,2) = Hg(2,2)}$$

$$g(x,y) = e^{F(x,y)} \qquad g(2,2) = e^{F(2,2)}$$

$$1 = e^{F(2,2)} \Rightarrow \boxed{F(2,2) = 0}$$

$$g_x(x,y) = e^{F(x,y)} F_x(x,y)$$

$$\overbrace{g_x(2,2)}^{-1} = e^{\overbrace{F(2,2)}^{0}} F_x(2,2)$$

$g$.

$$\boxed{-1 = F_x(2,2)}$$

$$g_y(x,y) = e^{F(x,y)} \cdot F_y(x,y)$$

$$g_y(2,2) = e^{F(2,2)} \cdot F_y(2,2)$$

$$\boxed{5 = F_y(2,2)}$$

$$\cancel{g_{xx}(x,y) = e^{F(x,y)} \cdot F_x(x,y)^2 + F_{xx}(x,y)}$$

$$g_{xx}(x,y) = e^{F(x,y)} \, F_x(x,y)^2 + F_{xx}(x,y)\, e^{F(x,y)}$$

[illegible]

$$g_{xx}(2,2) = e^{F(2,2)} \cdot F_x(2,2)^2 + F_{xx}(2,2)\, e^{F(2,2)}$$

$$0 = (-1)^2 + F_{xx}(2,2)$$

$$\boxed{-1 = F_{xx}(2,2)}$$

$$g_{yy}(x,y) = e^{F(x,y)} \, F_y(x,y)^2 + F_{yy}(x,y)\, e^{F(x,y)}$$

$$2 = F_y(2,2)^2 + F_{yy}(2,2)$$

$$\boxed{-23 = F_{yy}(2,2)}$$

$$g_{xy}(x,y) = e^{F(x,y)} \, F_x(x,y)\, F_y(x,y) + F_{xy}(x,y)\, e^{F(x,y)}$$

③ KEVIN SABETAY

$g_{xy}(2,2) = F_x(2,2)\,F_y(2,2) + F_{xy}(2,2)$

$0 = (-1)\cdot 5 + F_{xy}(2,2)$

$\boxed{5 = F_{xy}(2,2) = F_{yx}(2,2)}$ $\to F_\varepsilon C^2$

Por lo tanto

$F(2,2) = 0 \qquad \nabla F(2,2) = (-1, 5) \qquad HF(2,2) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -23 \end{pmatrix}$

Ahora sí, construyo el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(2,2)$

$$\boxed{T_F(x,y) = -(x-2) + 5(y-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{23}{2}(y-2)^2 + 5(x-2)(y-2)}$$

④ Kevin Sabetay

② ⓐ $F(x,y) = 4e^{x^2+y^2-6y}$

$\nabla F(x,y) = \left(4 \cdot 2x \, e^{x^2+y^2-6y}, \; 4 \cdot (2y-6) e^{x^2+y^2-6y}\right)$

$\nabla F(x,y) = \left(8x e^{x^2+y^2-6y}, \; 8(y-3) e^{x^2+y^2-6y}\right)$

Para hallar los puntos críticos me fijo $\nabla F(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 8x \, e^{x^2+y^2-6y} = 0 & \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 8(y-3) \, e^{x^2+y^2-6y} = 0 & \Rightarrow \boxed{y=3} \end{cases}$$

Como $e^{x^2+y^2-6y}$ nunca se hace cero solo obtengo el punto $(0,3)$

Para ver si es extremo o pto. silla veamos su Hessiano.

$$\cancel{HF(x,y) = \begin{pmatrix} 8\left(e^{x^2+y^2-6y} + 2x^2 e^{x^2+y^2-6y}\right) & 8x(2y-6)e^{x^2+y^2} \\ 8x(2y-6)e^{x^2+y^2-6y} & 8\left(e^{x^2+y^2-6y} + 2(y-3)^2\right) \end{pmatrix}}$$

Fes $F_{xx}(x,y) = 8\left(e^{x^2+y^2-6y} + 2x^2 e^{x^2+y^2-6y}\right)$

$F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) = 8x(2y-6)e^{x^2+y^2-6y}$

$F_{yy}(x,y) = 8\left(e^{x^2+y^2-6y} + 2(y-3)^2 e^{x^2+y^2-6y}\right)$

$$F_{xx}(0,3) = 8\left(e^{0+9-18} + 0\right) = \frac{8}{e^9}$$

$$F_{xy}(0,3) = F_{yx}(0,3) = 0$$

$$F_{yy}(0,3) = 8\left(e^{-9} + 0\right) = \frac{8}{e^9}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{8}{e^9} & 0 \\ 0 & \frac{8}{e^9} \end{pmatrix} = \left(\frac{8}{e^9}\right)^2 > 0$$

$$F_{xx}(0,3) = \frac{8}{e^9} > 0$$

Por el criterio del Hessiano, sabiendo que el determinante y $F_{xx}(0,3)$ son mayores a cero $\Rightarrow$ $(0,3)$ es un mínimo local

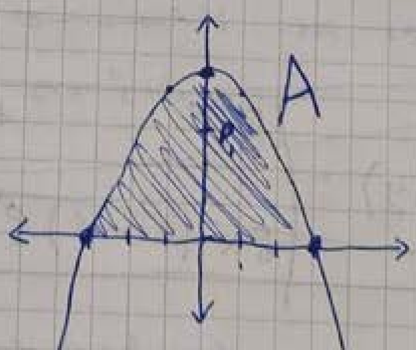
ⓑ Vamos a graficar la región A

$2y + x^2 \leq 9$

$$\boxed{y \leq \frac{9}{2} - \frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{y \geq 0}$$

| x | $y = \frac{9}{2} - \frac{x^2}{2}$ |
|---|---|
| 0 | 9/2 |
| 1 | 4 |
| -1 | 4 |
| 3 | 0 |
| -3 | 0 |




Veamos si $P_1 = (0,3)$ ESTA en EL interior de A

$$0 \leq 3 \leq \frac{9}{2} - \frac{0}{2} \quad \checkmark$$

Ahora veamos que pasa en los bordes

Voy a parametrizar y componer con F a la curva $\alpha_2$: $y = \frac{9}{2} - \frac{x^2}{2}$ y a la recta $\alpha_1$: $y = 0$

$\alpha_1(t) = (t, 0) \quad -3 \leq t \leq 3$

$\alpha_2(t) = \left(t, \frac{9-t^2}{2}\right), \quad -3 \leq t \leq 3$

$g_1(t) = F \circ \alpha_1(t) = 4e^{t^2}$

Veamos sus puntos críticos igualando

$g_1'(t) = 0$

$g_1'(t) = 4 \cdot 2t \cdot \underbrace{e^{t^2}}_{>0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{t = 0} \quad -3 \leq 0 \leq 3$ ✓

$\alpha_1(0) = (0,0) = P_2$ SE SUMA A LA LISTA

Hago lo mismo con $\alpha_2$

$g_2(t) = F \circ \alpha(t) = 4e^{t^2 + \left(\frac{9}{2} - \frac{t^2}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{9}{2} - \frac{t^2}{2}\right)}$

$g_2(t) = 4e^{t^2 + \frac{81}{4} - \frac{9}{2}t^2 + \frac{t^4}{4} - 27 + 3t^2} = 4e^{\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{81}{4} - 27}$

⑥

$$g_2'(t) = 4(t^3 - t)\, e^{\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{81}{4} - 27}$$

Igualo $g_2'(t) = 0$

$$4(t^3 - t)\, \underbrace{e^{\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{81}{4} - 27}}_{>0} = 0$$

$\Downarrow$

$t(t^2 - 1) = 0$

$\Downarrow$ $t = 0$

$\Downarrow$ $t = 1$, $t = -1$

$-3 \leq 0, 1, -1 \leq 3$ ✓

$$\alpha_2(0) = \left(0, \frac{9}{2} - 0\right) = \left(0, \frac{9}{2}\right) = P_3$$

$$\alpha_2(-1) = \left(-1, \frac{9}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = (-1, 4) = P_4$$

$$\alpha_2(1) = \left(1, \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = (1, 4) = P_5$$

Por último agrego los extremos $t = -3$ y $t = 3$ donde intersectan $\alpha_1$ y $\alpha_2$

$$\alpha_1(3) = (3, 0) = P_6$$

$$\alpha_1(-3) = (-3, 0) = P_7$$

Como F es continua y A ~~es~~ una región compacta van a existir mínimo/s y máximo/s absolutos.

⑥ KEVIN SABETAY

$$F(P_1) = 4 \cdot e^{0+9-18} = \frac{4}{e^9}$$ } $P_1$ es el PUNTO donde se alcanza el mínimo absoluto.

$$F(P_2) = 4 \cdot e^0 = 4$$

$$F(P_3) = 4 \cdot e^{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 27} = \frac{4}{e^{27/4}}$$

$$F(P_4) = 4 \cdot e^{1+16-24} = \frac{4}{e^7}$$

$$F(P_5) = 4 \cdot e^{1+16-24} = \frac{4}{e^7}$$

$$F(P_6) = 4 \cdot e^9$$

$$F(P_7) = 4 \cdot e^9$$

} $P_6$ y $P_7$ son los puntos donde se alcanza el máximo absoluto

(7) KEVIN SABETAY

(3) $y^2 = x + 5$ $\qquad$ $y^2 = 7 - x$

$\boxed{x = y^2 - 5}$ $\qquad$ $\boxed{x = 7 - y^2}$

| $y$ | $x = y^2 - 5$ |
|---|---|
| 0 | -5 |
| 1 | -4 |
| -1 | -4 |
| $\sqrt{5}$ | 0 |
| $-\sqrt{5}$ | 0 |

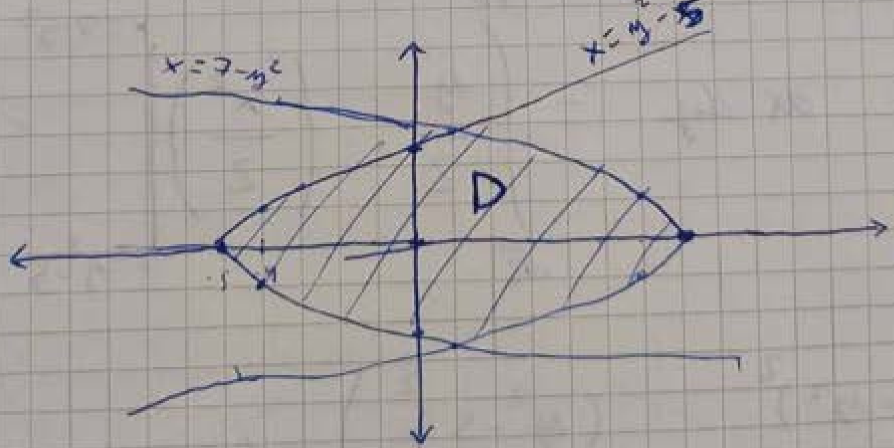
| $y$ | $x = 7 - y^2$ |
|---|---|
| 0 | 7 |
| 1 | 6 |
| -1 | 6 |
| $\sqrt{7}$ | 0 |
| $-\sqrt{7}$ | 0 |

Veamos en qué punto se da la intersección

$y^2 - 5 = 7 - y^2$ $\qquad$ $2y^2 = 12$ $\qquad$ $y^2 = 6$

$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = \sqrt{6} \\ y_2 = -\sqrt{6} \end{array}}$ $\qquad$ $x = \sqrt{6}^2 - 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

La intersección se da en $(1, \sqrt{6})$ y $(1, -\sqrt{6})$




Si la pensamos como región de tipo 2

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 - 5 \leq x \leq 7 - y^2 \ , \ -\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6} \}$

Para calcular el área de la región uso la función 1

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\int_{y^2-5}^{7-y^2} 1 \, dx \, dy = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 7-y^2-(y^2-5) \, dy$$

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 12-2y^2 \, dy = \left(12y - \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}$$

$$= 12\sqrt{6} - \frac{2}{3}\sqrt{6}^3 - \left(-12\sqrt{6} - \frac{2}{3}(-\sqrt{6})^3\right)$$

$$= 12\sqrt{6} - \frac{2\cdot 6\sqrt{6}}{3} + 12\sqrt{6} - \frac{2\ 6\sqrt{6}}{3} =$$

$$= 24\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = \boxed{16\sqrt{6}}$$

b)

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\int_{y^2-5}^{7-y^2} \frac{xy}{2} \, dx \, dy = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=y^2-5}^{x=7-y^2} dy$$

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{(7-y^2)^2}{2} - \frac{(y^2-5)^2}{2}\right) dy$$

8 KEVIN SABETAY

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \frac{y}{2} \left( \frac{49 - 14y^2 + y^4}{2} - \frac{y^4 - 10y^2 + 25}{2} \right) dy$$

$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \frac{y}{2} \left( \frac{-4y^2 + 24}{2} \right) dy = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} y(-y^2 + 6)\, dy$$

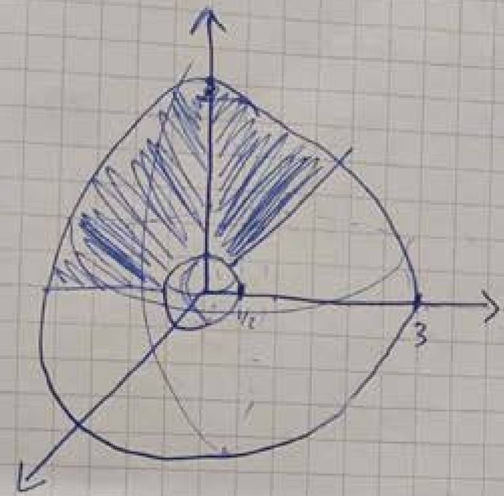
$$= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} -y^3 + 6y \; dy = \left( \frac{-y^4}{4} + \frac{6y^2}{2} \right) \Bigg|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{-\sqrt{6}^4}{4} + 3\sqrt{6}^2 - \left( \frac{-(-\sqrt{6})^4}{4} + \frac{6(-\sqrt{6})^2}{2} \right)$$

$$= -9 + 18 - (-9 + 18) = \boxed{0}$$

(9) KEVIN SABETAY

4) El dibujo se va a tratar de dos esferas de radio $\frac{1}{2}$ y $3$ pero solo la parte donde $z \geq 0$ y $x, y \leq 0$




Usando coordenadas esféricas puedo pensar:

$$W^* = \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

~~Por~~ Sea

$$F(\rho, \theta, \varepsilon) = (\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varepsilon)$$

Por el teorema de cambio de variables

$$\iiint_W \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \, dV(x,y,z) = \cancel{\iiint_{W^*} 3\rho \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\varepsilon}$$

$$= \iiint_{W^*} \frac{3(\rho \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\theta)(\rho\cos\varepsilon)}{(\rho^2)^2} \cdot \overbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\varepsilon}^{\text{JACOBIANO DE COORDS ESFÉRICAS}} \, dV(\rho, \theta, \varepsilon)$$

Raro, el dV incluiría al jacobiano per se.

$$= \iiint_{W^*} \frac{3\cancel{\rho^4} \operatorname{sen}^2\varepsilon \cos\varepsilon \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^4}} \, dV(\rho,\varepsilon,\theta)$$

Como $\rho$, $\varepsilon$ y $\theta$ no dependen entre ellos se pueden calcular por separado.
En el caso de $\rho$ basta con tomar su longitud.

(3) $$\int_{1/2}^{3} 1 \, d\rho \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\varepsilon \cos\varepsilon \, d\varepsilon =$$

$$\left(3 - \frac{1}{2}\right) \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\pi}^{3/2\pi} \cdot \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\varepsilon \cos\varepsilon \, d\varepsilon =$$

$$u = \operatorname{sen}\varepsilon$$

$$du = \cos\varepsilon \, d\varepsilon$$

$$\int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3\varepsilon}{3}$$

$$\frac{5}{2}\left(0 - (1)\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^3\varepsilon}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} =$$

$$-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \boxed{-\frac{5}{6}}$$

falta el factor 3 por constante.