5

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Calificación |
|---|---|---|---|---|---|
| B/M | B | B | B | B⁻ | A |

Apellido y Nombre:

No. de libreta:

Turno: MAÑANA

Carrera: computación.

# Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Primer Parcial - 06/10/2015

1. *a*) Sean $A$, $B$ conjuntos y $f : A \to B$ una función. Probar que la relación $\mathcal{R}$ en $A$ definida por:
$$a\,\mathcal{R}\,b \iff f(a) = f(b)$$
es de equivalencia.

   *b*) Sea $A$ un conjunto finito y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en $A$. Demostrar que existe una función $f : A \to \mathbb{N}$ tal que para todo $a, b \in A$, vale que $a\,\mathcal{R}\,b \iff f(a) = f(b)$.

2. Dada la ecuación diofántica $84x + 18y = 126$.

   *a*) Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación.

   *b*) Encontrar todas las soluciones naturales.

3. Juan tiene 20 libros (distintos) y los quiere repartir en 3 estantes.

   *a*) ¿De cuántas maneras puede hacerlo? distintos entre ellos

   *b*) ¿De cuántas maneras si hay exactamente 5 novelas y las quiere ubicar juxtapuestas (sin otros libros en medio)? juntas en el mismo estante

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

5. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ impar, $(7n + 2^{n+1} : 2n - 2^n) = 1$ u 11.

*Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.*
*Justifique todas sus respuestas.*

JONATHAN SEIJO

HOJA

FECHA

① a) Sean A, B conjuntos y $f: A \to B$ una función.
Probar que la relación R en A definida por:

$$a R b \iff f(a) = f(b)$$

es de equivalencia.

---

Para que la relación sea de equivalencia, esta debe ser reflexiva, simétrica y transitiva al mismo tiempo.
Voy a mostrar que R cumple estas tres cosas.

- Reflexiva:

$a R a$ ?

$a R a \iff f(a) = f(a)$. ✓

Como f es una función, a cada elemento del dominio le corresponde un ÚNICO elemento. Entonces como a 'a' le corresponde el ~~mismo~~ mismo elemento, $f(a) = f(a) \iff a R a$

$\Rightarrow$ Es Reflexiva. ✓

- Simetrica:

$a R b \Rightarrow b R a$ ?

$a R b \iff f(a) = f(b)$

• como la igualdad es ~~reflexiva~~ simetrica, vale que $f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a)$

Entonces $b R a$, ✓

Como $a R b \Rightarrow b R a$, es simetrica. ✓

NOTA

TRANSITIVA:

$aRb$ y $bRc \Rightarrow aRc$ ?

$aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

$bRc \Leftrightarrow F(b) = f(c)$.

Como $f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(c)$,

por transitividad de la igualdad vale que $f(a) = f(c) \Rightarrow aRc$.

Entonces es Transitiva. ✓

• Como probé que la relación es reflexiva, simétrica y Transitiva, $\Rightarrow$ probé que es de equivalencia. ✓

b) Sea A un conjunto finito y R una relación de equivalencia en A. Demostrar que existe una función $f: A \to \mathbb{N}$ tal que para todo $a, b \in A$, vale que $aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

• Tomando un $n \in \mathbb{N}$,

puedo definir una Función $F: A \to \mathbb{N}$

de forma que $F(a) = n$.

Es decir una función constante ~~para~~ de al fin n natural.

La relación vale pues $\forall a, b \in A$, $f(a) = f(b) \Leftrightarrow$ ~~aRb~~

$\Downarrow$

$n = n$

NO: No cumple $f(a)=f(b) \Rightarrow aRb$

muestra que R es de equivalencia. → R ya estaba dada y era de equivalencia

~~Ref~~ Reflexiva, $aRa \Leftrightarrow F(a) = F(a) \Leftrightarrow n = n$ ✓

Simétrica, $aRb \Rightarrow bRa$, $F(a) = F(b) \Leftrightarrow n = n \Leftrightarrow F(b) = F(a)$ ✓

Transitiva, $F(a) = F(b)$ y $F(b) = F(c)$, $F(a) = F(c)$ pues $n = n$ ✓

• Como la función constante cumple las condiciones,

NOTA mostré que existe una función que cumple lo pedido.

JONATHAN SEIJO.

HOJA

FECHA

② Dada la ecuación diofántica $84x + 18y = 126$.

a) Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación.

$$\%6 \left\{ \begin{array}{l} 84x + 18y = 126 \\ 14x + 3y = 21 \end{array} \right.$$

¿Tiene solución?

$(14:3) \mid 21$ ?

$14 = 4.3 + 2$

$3 = 1.2 + \boxed{1}$ $\quad (14:3) = 1 \mid 21$ ✓

$2 = 1.2 + 0$

Busco una solución particular.

$1 = 3 - 2$

$1 = 3 - (14 - 3.4)$

$1 = 3 - 14 + 3.4$

$1 = 14(-1) + 3(5)$

$21 = 14(-21) + 3(105)$

Sabiendo que 14 y 3 son coprimos,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -21 + 3k \\ y = 105 - 14k \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$ → Todas las soluciones enteras de la ecuación.

NOTA

b) Encontrar todas las soluciones naturales

$$\begin{cases} x = -21 + 3K \\ y = 105 - 14K \end{cases}$$ → Soluciones que encontré en a)

Quiero que sean naturales, entonces:

$-21 + 3K > 0$ y $105 - 14K > 0$

$3K > 21$ $\quad$ $105 > 14K$

$K > 7$ y $7{,}5 > K$

O sea que para que haya solución natural,

$7{,}5 > K > 7$.

Esto NO puede suceder pues $K \in \mathbb{Z}$.

⇒ NO TIENE SOLUCIONES NATURALES

JONATHAN
SEIJO.

HOJA N°

FECHA

③ Juan tiene 20 libros y los quiere repartir en 3 estantes.

a) ¿De cuantas maneras puede hacerlo?

- Los libros son DISTINGUIBLES, y asumo que puede haber estantes vacíos. ✓

Lo pienso con anagramas, pensando que 'E' es un separador de ~~tercera~~ estantes. Ej $\underbrace{L_1 L_2} E \underbrace{L_3} E \underbrace{L_4 \ldots}$

$L_1 L_2$ en estante primero
$L_3$ en segundo estante
$L_4 \ldots L_{20}$ en estante tercero.

los libros son distinguibles, $L_1 \to$ libro 1
$L_2 \to$ libro 2 ..

~~[illegible]~~ $L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 \ldots L_{19} L_{20} EE$

Puedo formar $\left(\dfrac{22!}{2!}\right)$ anagramas. ✓

$\Rightarrow$ Hay $\boxed{\dfrac{22!}{2!}}$ formas para repartir 20 libros en 3 estantes.

b) ¿De cuantas maneras si hay exactamente 5 novelas y los quiere ubicar yuxtapuestas?

Pienso las ~~5~~ novelas como una N (Pues las novelas deben estar juntas).

y luego las permutaciones de las novelas.

[→] sigo atrás.

NOTA

entonces tengo:

$\underbrace{L_1 L_2 L_3 L_4 \ldots L_{14} L_{15} N E E}_{18 \text{ Total}}$.

permutaciones de $N = n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$

$= 5!$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{18!}{2!} \cdot 5!}$ ✓

JONATHAN SEIJO.

HOJA

FECHA

④ Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

$(n^3 - n)$ múltiplo de 6 $\iff$ $6 \mid n^3 - n$.

quiero probar que vale $\forall n \in \mathbb{N}$, uso inducción.

Caso base, $n = 1$.

$6 \mid 1^3 - 1 \rightsquigarrow 6 \mid 0$ vale, pues $0 = 0.6 + 0$. ✓

(HI). Supongo que vale $6 \mid n^3 - n$.

qvq $6 \mid (n+1)^3 - (n+1)$

$(n+1)^3 - (n+1) =$

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$

$= \underbrace{n^3 - n}_{\text{I}} + \underbrace{3n^2 + 3n}_{\text{II}}$

I Por (HI), $6 \mid n^3 - n$ ✓

II ¿$6 \mid 3n^2 + 3n$?

Realizo una segunda inducción para probar que vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Caso base, $n = 1$.

$6 \mid 3 + 3 \rightsquigarrow 6 \mid 6$ ✓ ✓

(HI)(2) Supongo que vale $6 \mid 3n^2 + 3n$.

qvq $6 \mid 3(n+1)^2 + 3(n+1)$

(Sigue atrás) →

NOTA

$3(n+1)^2 + 3(n+1) =$

$= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 =$

$= \underbrace{3n^2 + 3n}_{\text{III}} + \underbrace{6n + 6}_{\text{IV}}$

III Por HI(2) vale que $6 \mid 3n^2 + 3n$.

IV Como $6|6$ y $6|6n \Rightarrow 6 \mid 6n + 6$.

Entonces $6 \mid 3n^2 + 3n + 6n + 6$

$\Leftrightarrow 6 \mid 3(n+1)^2 + 3(n+1)$ que es lo que queríamos probar.

• volviendo a las hipótesis inductiva original,

Tengo que:

$6 \mid n^3 - n$ (por la hipótesis inductiva original)

y $6 \mid 3n^2 + 3n$.

$\Rightarrow 6 \mid n^3 - n + 3n^2 + 3n = (n+1)^3 - (n+1)$

que es donde queríamos llegar.

Entonces probé que $6 \mid n^3 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

NOTA

JONATHAN SEIJO.

HOJA

FECHA

(5) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ impar,

$(7n + 2^{n+1} : 2n - 2^n) = 1$ ó $11$

Como $n$ es impar, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

$$d = (7(2k+1) + 2^{2k+2} : 2(2k+1) - 2^{2k+1})$$ ✓

• $d \mid 7(2k+1) + 2^{2k+2}$ y $d \mid 2(2k+1) - 2^{2k+1}$

ó $d \mid 2(2(2k+1) - 2^{2k+1})$

$d \mid 4(2k+1) - 2^{2k+2}$

$\Rightarrow d \mid 7(2k+1) + 2^{2k+2} + 4(2k+1) - 2^{2k+2}$.

$\Rightarrow \boxed{d \mid 11(2k+1)}$ ✓

• $d \mid 7(2k+1) + 2^{2k+2}$ y $d \mid 2(2k+1) - 2^{2k+1}$

$d \mid 2(7(2k+1) + 2^{2k+2})$ y $d \mid 7(2(2k+1) - 2^{2k+1})$

$d \mid 14(2k+1) + 2^{2k+3}$ y $d \mid 14(2k+1) - 7 . 2^{2k+1}$

$\Rightarrow d \mid 14(2k+1) + 2^{2k+3} - (14(2k+1) - 7 . 2^{2k+1})$

$\Rightarrow d \mid 2^{2k+3} + 7 . 2^{2k+1}$.

$\Rightarrow \boxed{d \mid 2^{2k+1}(4+7) = 11 . 2^{2k+1}}$ ✓

NOTA

- $d \mid 11.(2k+1)$ y $d \mid 11.\,2^{2k+1}$

$\Rightarrow d \mid (11.(2k+1) : 11.(2^{2k+1}))$

- $2^{2k+1}$ esta formado por potencias de 2,

y $(2k+1)$ es uno numero impar que no es factor de $2^{2k+1}$.

$\Rightarrow (2k+1 : 2^{2k+1}) = 1$ ✓

$d \mid 11.(\underbrace{2k+1 : 2^{2k+1}}_{1}) \Rightarrow d \mid 11.$ ✓

Los divisores positivos de 11 son 1 y 11 (11 es primo).

entonces $d=1$ ó $d=11$.

Como considere que $n = 2k+1$,

no probé el caso $n=1$ (1 es impar).

$(7.1 + 2^{1+1} : 2 - 2) =$

$= (11 : 0) = 11$ ✓ ✓

Te falta ver un caso donde

$(7n + 2^{n+1} : 2n - 2^{n}) = 1$.