0,65

Listo

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(30/12/03)

NOMBRE Y APELLIDO:
N° DE LIBRETA: N° DE HOJAS ENTREGADAS:
e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIAR LAS PROPIEDADES QUE SE UTILIZAN

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

---

1. **(25 puntos)**

   (a) Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar su función generadora de momentos, su esperanza y su varianza.

   (b) Sean $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ variables aleatorias independientes. Deduzca la distribución de $X + Y$. ¿Es alguna distribución conocida?

2. **(25 puntos)**

   (a) Probar que si F es una función de distribución acumulada continua y estrictamente creciente y $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, entonces la variable aleatoria $Y = F^{-1}(U)$ tiene a F como función de distribución acumulada.

   (b) Dada la función de densidad:

   $$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}} \mathcal{I}_{(0,\infty)}(x)$$

   ¿Cómo podría generar una variable aleatoria con esta densidad a partir de una variable aleatoria uniforme? Justifique detalladamente.

3. **(25 puntos)** Sean T_n y W_n dos estimadores insesgados del parámetro θ

   (a) Si estos estimadores se combinan para formar un nuevo estimador dado por

   $$\widehat{\theta}_n = \alpha T_n + \beta W_n$$

   donde α y β son constantes. ¿Qué condiciones deben cumplir α y β para que $\widehat{\theta}_n$ sea insesgado?

   (b) Si T_n y W_n son independientes y tienen varianza $V(T_n)$ y $V(W_n)$, respectivamente, calcular la varianza de $\widehat{\theta}_n$.

(c) Bajo las condiciones de b), ¿cuál es la elección de α y β que minimiza la varianza de $\widehat{\theta}_n$ y que a la vez hace que el estimador sea insesgado?

4. (25 puntos)

(a) Enuncie el Teorema Central del Límite.

(b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $Bi(1,p)$ y n suficientemente grande. Deducir un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para p.

(c) Se llama *chance* al cociente $g(p) = \dfrac{p}{1-p}$ que mide cuánto más frecuentes son los éxitos que los fracasos.

i. Probar que si $p > q$, entonces $g(p) > g(q)$. (A mayor probabilidad de éxito, mayor chance).

ii. Hallar un intervalo de confianza de nivel aproximado $1-\alpha$ para $\theta = \dfrac{p}{1-p}$.

$X_1, \ldots, X_n$ indep $\Rightarrow$ $g(X_1, \ldots, X_k)$ $h(X_k, \ldots, X_{k+m})$ $w(X_{k+m}, \ldots, X_n)$ son indep

U, V indep $\Rightarrow$ U^2 y V^2 son inde

$$Var(UV) = E((UV)^2) - E(UV)^2$$
$$= E(U^2)E(V^2) - E(U)^2 \, E(V)^2$$

EX. FINAL 30/12/03

3) T_m y W_m estim. insesgados de θ

a)

$E(T_m) = \theta \qquad E(W_m) = \theta$

$E(\hat{\theta}_m) = E(\alpha T_m + \beta W_m) = \alpha \cdot E(T_m) + \beta E(W_m) =$

$= \alpha \theta + \beta \theta = (\alpha + \beta)\theta$ Debe ser $\alpha + \beta = 1$

b)

$V(\hat{\theta}_m) = V(\alpha T_m + \beta W_m) =$

$= E((\alpha T_m + \beta W_m)^2) - E(\alpha T_m + \beta W_m)^2 =$

$= E(\alpha^2 T_m^2 + 2\alpha\beta T_m W_m + \beta^2 W_m^2) - (\alpha\theta + \beta\theta)^2$

$= \alpha^2 E(T_m^2) + 2\alpha\beta\theta^2 + \beta^2 E(W_m^2) - (\alpha^2\theta^2 + 2\alpha\beta\theta^2 + \beta^2\theta^2)$

$E(T_m^2) - E(T_m)^2 = V(T_m)$

$E(T_m^2) = V(T_m) + \theta^2$

$= \alpha^2(V(T_m) + \theta^2) + \cancel{2\alpha\beta\theta^2} + \beta^2(V(W_m) + \theta^2) - \alpha^2\theta^2$

$- \cancel{2\alpha\beta\theta^2} - \beta^2\theta^2 =$

$= \alpha^2 V(T_m) + \cancel{\alpha^2\theta^2} + \beta^2 V(W_m) + \cancel{\beta^2\theta^2} - \cancel{\alpha^2\theta^2} - \cancel{\beta^2\theta^2} =$

$= \alpha^2 V(T_m) + \beta^2 \cdot V(W_m)$

$\alpha = 1 - \beta \qquad V(\hat{\theta}_m) = (1-\beta)^2 V(T_m) + \beta^2 V(W_m) =$

$= (1 - 2\beta + \beta^2) V(T_m) + \beta^2 V(W_m) =$

$= V(T_m) - 2\beta V(T_m) + \beta^2 V(T_m) + \beta^2 \cdot V(W_m)$

húsares

$$V(\hat{\theta}_m) = \beta^2 \left(V(T_m) + V(W_m)\right) - 2V(T_m)\beta + V(T_m)$$

$\downarrow$

lo veo como func. de β

El mín se alcanza en $\beta = \dfrac{2V(T_m)}{\cancel{2}\,V(T_m)+V(W_m)} =$

$$\boxed{\beta = \frac{V(T_m)}{V(T_m)+V(W_m)}}$$

$$\alpha = 1 - \frac{V(T_m)}{V(T_m)+V(W_m)} = \boxed{\frac{V(W_m)}{V(T_m)+V(W_m)}}$$

2) a)

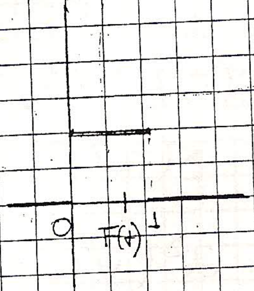
$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) =$$

$$\underset{\downarrow}{=} P\left(F(F^{-1}(U)) \leq F(t)\right) =$$

F es estrict creciente

$$= P(U \leq F(t)) \underset{\downarrow}{=} F(t)$$

U unif en $[0,1]$



$$\Rightarrow F_Y(t) = F(t) \quad \forall t$$

$$f(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha \cdot x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} I_{(0,\infty)}(x)\, dx \underset{\substack{\downarrow \\ t>0}}{=} \int_0^t \alpha \cdot x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha}\, dx =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ u = x^\alpha \\ du = \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx}}{=} \int_0^t e^{-u} \, du = -e^{-x^\alpha}\Big|_0^t = -e^{-t^\alpha} + 1$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-t^\alpha} & \text{si } 0 < t \end{cases}$$

es una f. de distribuc. acumulada continua y estrictam. creciente.

Sea $U \sim U(0,1)$

Por el inciso anterior, la v.a. $Y = F^{-1}(U)$ tiene a F como func. de distrib. acumulada, y, por lo tanto, su densidad es la dada.–

$$F^{-1}(t) = \left[-\ln(1-t)\right]^{1/\alpha} \qquad t \in (0,1)$$

Luego $Y = \left[-\ln(1-U)\right]^{1/\alpha}$ siendo $U \sim U(0,1)$ tiene la densidad dada.–

④ a) Teorema central del límite

Sean $X_1, X_2 \ldots$ v.a. i.i.d. con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$

Entonces, si n es suf. grande

$$\frac{T - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \overset{(d)}{\sim} N(0,1) \qquad T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

b) $X_1, X_2 \ldots \sim Bi(1, p)$

$$\sum X_i \sim Bi(n, p)$$

$$E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i) = n\cdot p \qquad E(\bar X) = p$$

$$V\left(\sum X_i\right) = n\cdot p(1-p) \qquad V(\bar X) = \frac{p(1-p)}{n}$$

luego

$$\sqrt{n}\,\frac{\frac{\sum x_i}{\sqrt{n^2}} - \frac{p}{\sqrt{n}}}{} = \sqrt{n}\,\frac{(\bar X - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$ para n suf. grande

$$\bar X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$$

$$\bar X \xrightarrow{P} p$$ por la ley de los G.N

$$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\bar X(1-\bar X)}} \xrightarrow{P} 1$$ por prop.

$$\frac{\sqrt{n}(\bar X - p)}{\sqrt{\bar X(1-\bar X)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

0,65

7/8

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{m}\,(\overline{X}-p)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{m}} \leq \overline{X}-p \leq \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{m}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(-\overline{X}-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{m}} \leq -p \leq -\overline{X}+\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{m}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X}-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{m}} \leq p \leq \overline{X}+\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{m}}\right) \simeq 1-\alpha$$

c) Toma $g(p) = \frac{p}{1-p}$

$p > q \qquad g(p) > g(q)$

$$p > q \Rightarrow \frac{p}{1-p} > \frac{q}{1-p} > \frac{q}{1-q}$$

$p > q$

$-p < -q$

$$1-p < 1-q \Rightarrow \frac{1}{1-p} > \frac{1}{1-q}$$

ii) $\frac{p}{1-p} \to \frac{1}{\frac{1-p}{p}} \to \frac{1}{\frac{1}{p} - 1}$

$$P(a \le p \le b) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{b} \le \frac{1}{p} \le \frac{1}{a}\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{b} - 1 \le \frac{1}{p} - 1 \le \frac{1}{a} - 1\right) \simeq 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\frac{1}{a} - 1} \le \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{p} - 1}}_{\frac{p}{1-p}} \le \frac{1}{\frac{1}{b} - 1}\right) \simeq 1-\alpha$$

$1-\alpha$

húsares