1	2	3	4

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: Oyhanart Tomás

CARRERA: Cs. de la Computación

¿LLENÓ LA ENCUESTA? Sí

LIBRETA: 988/21

CUATR. APROBACIÓN TPS: Sí

CUATR. APROBACIÓN TALLER: Sí

Algebra I

Examen Final (28/7/2021)

---

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de números racionales definida recursivamente por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -5 \ \text{ y } \ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{5} + 75a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Probar que

- $a_n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$,
- $5^n \mid a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ pero $5^{n+1} \nmid a_n$ para ningún $n \in \mathbb{N}_0$.

---

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $c \neq 0$. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones. Si la implicación es verdadera probarla, en caso contrario exhibir un contraejemplo.

(a) $a \equiv b \mod c \ \Rightarrow \ (a : c) = (b : c)$.

(b) $(a : c) = (b : c) \ \Rightarrow \ a \equiv b \mod c$.

---

3. Determinar aquel polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico y de grado mínimo que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

- f tiene como raíz a alguna raíz sexta primitiva de la unidad.
- $(f : f') = X^2\left(X^2 + 1\right)$.
- $X - \sqrt{3} \mid f$ en $\mathbb{R}[X]$.

---

4. Determinar todos los primos positivos p tales que el polinomio

$$f = X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2pX - p$$

admite al menos una raíz racional positiva. Para cada valor hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1

Ejercicio 1

Hoja: 1

$a_0 = 1$

$a_1 = -5$

$a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^3}{5} + 75a_n \quad \forall n \geq 0$

Qpq $a_n \in \mathbb{Z} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow$ Casos bases. $a_0 = 1 \in \mathbb{Z}$ ✓

$a_1 = -5 \in \mathbb{Z}$ ✓

$a_2 = \dfrac{a_1^3}{5} + 75a_0 = \dfrac{-125}{5} + 75 = 50 \in \mathbb{Z}$ ✓

$\Rightarrow$ si $a_h \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_{h+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_{h+2} \in \mathbb{Z}$ es lo que quiero probar

Usando como hipotesis inductivas que tanto $a_h \in \mathbb{Z}$ como $a_{h+1} \in \mathbb{Z}$

Qpq $a_{h+2} = \dfrac{a^3_{h+1}}{5} + 75a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ sabiendo que $(n,m) \in (\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \Rightarrow n+m \in \mathbb{Z}$

bastaría con probar que $\underbrace{5 \mid a^3_{n+1}}_{\text{porque por HI } a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m,n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \cdot n \in \mathbb{Z}}$ que es lo mismo que decir que $a^3_{h+1} \equiv 0 \ (5)$ y la unica posibilidad que esto suceda es que $a_{h+1} \equiv 0 \ (5)$

$\Rightarrow$ Por inducción nuevamente

Casos bases, $h=0$, $a_1 \equiv 0 (5)$?

$-5 \equiv 0 (5)$ ✓

$\Rightarrow$ si $a_{h+1} \equiv 0 (5)$ Qpq $a_{n+2} \equiv 0 (5)$

Sigo en otra hoja

Hoja: 2

$5 | a_{n+2}$

$5 | \frac{a_{n+1}^3}{5} + 75 a_n$ como $5|75$ queda por probar que $5 | \frac{a_{n+1}^3}{5}$ es decir

~~$\frac{a_{n+1}^3}{5} \in \mathbb{Z}$ que por HI es cierto~~

$\frac{a_{n+1}^3}{5} \in \mathbb{Z}$ por HI

$\Rightarrow$ Qpq $25 | a_{n+1}^3 \Rightarrow a_{n+1}^2 \cdot a_{n+1} \equiv 0 \ (5^2)$

si $a^2 \equiv 0 \ (b^2)$
$\Rightarrow a \equiv 0 \ (b)$

bastaría con probar que $a_{n+1}^2 \equiv 0 \ (5^2)$

$a_{n+1} \equiv 0 \ (5)$ lo cual es cierto por HI

$\Rightarrow$ Ya que $5 | a_{n+1}^3 \Rightarrow a_{n+2} \in \mathbb{Z}$ porque $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$

y tanto $\frac{a_{n+1}^3}{5} \in \mathbb{Z}$ como $75 a_n \in \mathbb{Z}$

b) $5 | a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ pero $5^{n+1} \nmid a_n$ para ningún $n \in \mathbb{N}_0$.

Casos bases. $5^0 | a_0 = 1|1$ ✓ pero $5 \nmid a_0 \quad 5 \nmid 1$ ✓

$5^1 | a_1 = 5 | 5$ ✓ pero $5^2 \nmid a_1 \quad 25 \nmid 5$ ✓

$5^2 | \frac{a_1^3}{5} + 75 a_0 = 25 | \frac{-125}{5} + 75 = 25 | 50$ ✓

pero $5^3 \nmid \frac{a_1^3}{5} + 75 a_0 = 125 \nmid \frac{-125}{5} + 75 = 125 \nmid 50$ ✓

$\Rightarrow$ si $\underbrace{5^n | a_n \text{ pero } 5^{n+1} \nmid a_n \Rightarrow 5^{n+1} | a_{n+1} \text{ pero } 5^{n+2} \nmid a_{n+1}}_{HI}$

Qpq

Sigo en otra hoja

Hoja 3

Q) pq $5^{n+2} \mid a_{n+2}$ pero $5^{n+3} \nmid a_{n+2}$.

$$5^{n+2} \mid \frac{a_{n+1}^3}{5} + 75a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}^3}{5} + 5^2 \cdot 3 a_n \equiv 0\ (5^{n+2})$$

(*) Obs: puedo decir que $a_{n+1} = 5^{n+1} \cdot a'_{n+1}$ // $5 \nmid a'_{n+1}$

y $a_n = 5^n \cdot a'_n$ // $5 \nmid a'_n$.

(*)

$$\Rightarrow \frac{(5^{n+1} \cdot a'_{n+1})^3}{5} + 5^2 \cdot 3 \cdot 5^n \cdot a'_n \equiv 0\ (5^{n+2}).$$

$$\frac{(5^{n+1})^3 \cdot a'^3_{n+1}}{5} + \underbrace{5^{n+2} \cdot 3 \cdot a'_n}_{\equiv 0\ (5^{n+2})} \equiv 0\ (5^{n+2})$$

$$\frac{5^{3n+3} \cdot a'^3_{n+1}}{5} \equiv 0\ (5^{n+2})$$

$$5^{3n+2} \cdot a'^3_{n+1} \equiv 0\ (5^{n+2})$$

$$5^n \cdot 5^n \cdot 5^n \cdot 5^2 \cdot a'^3_{n+1} \equiv 0\ (5^{n+2})$$

$$\underbrace{5^{n+2}}_{} \cdot 5^{2n} \cdot a'^3_{n+1} \equiv 0\ (5^{n+2})$$

$$0 \cdot 5^{2n} \cdot a'^3_{n+1} \equiv 0\ (5^{n+2})\ ✓. \Rightarrow 5^{n+2} \mid a_{n+2}$$

Ahora debo probar que $5^{n+3} \nmid a_{n+2}$.

(*) puedo partir de este paso

$$\Rightarrow \frac{(5^{n+1} \cdot a'_{n+1})^3}{5} + 5^2 \cdot 3 \cdot 5^n \cdot a'_n \not\equiv 0\ (5^{n+3})$$

$$5^{3n+2} \cdot a'^3_{n+1} + 5^{n+2} \cdot 3 \cdot a'_n \not\equiv 0\ (5^{n+3})$$

$$5^{n+2}\left(5^{2n} \cdot a'^3_{n+1} + 3a'_n\right) \not\equiv 0\ (5^{n+3})$$

divido todos los miembros por 5^{n+2}

$$5^{2n} \cdot a'^3_{n+1} + 3a'_n \not\equiv 0\ (5) \Rightarrow 3a'_n \not\equiv 0\ (5)$$ porq $5 \nmid 3$ ni $5 \nmid a'_n$ por HI

Ejercicio 2 Hoja: 4

(a) $a \equiv b\,(c) \Rightarrow (a:c) = (b:c)$

$\Rightarrow a = ck + b \Rightarrow (ck+b:c) = (b:c)$.

$\Rightarrow$ Supongamos $b \perp c \Rightarrow (ck+b:c) = 1$

lo cual vemos que es verdad ya que si $(ck+b:c) \neq 1$

habría un $d \neq 1$ tal que $d \mid ck+b$, $d \mid c$ $\Rightarrow d \mid ck+b - \overbrace{ck}^{\text{si } d|c \Rightarrow d|ck}$

$\Rightarrow d \mid b$ lo cual es un

Absurdo ya que si $d \mid c$ y $d \mid b$ y $c \perp b \Rightarrow d = 1$

Ahora veamos que pasa si $b \not\perp c$, esto quiere decir que compartan al menos 1 primo en su factorización.

$(ck+b:c) = (b:c)$ Coprimizamos, dividendo a ambas partes por $(b:c)$.

$(c'k+b':c') = (b':c')$ con $b' \perp c'$ y como demostramos antes

esto es $\boxed{\text{Verdadero}}$

(b) $(a:c) = (b:c) \Rightarrow a \equiv b\,(c)$

$a = 3$, $c = 12$ y $b = 9$

$\Rightarrow (3:12) = (9:12) \Rightarrow 3 \equiv 9\,(12)$

$(3 = 3) \checkmark \Rightarrow 3 \equiv 9\,(12)$ Falso.

$12k + 9 = 3$ para ningún $k \in \mathbb{N}_0$

Hoja: 5

Ejercicio 3
- $f(w)=0$ / w = raiz sexta primitiva de la unidad
- $(f:f')=x^2(x^2+1)$
- $(x-\sqrt{3}) \mid f$ en $\mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow$ ~~...~~ Veamos que todos los z tal que $z^6=1$ son : $e^{\frac{2k\pi}{6}i}$ con $0\le k\le 5$.

$(e^0, e^{1/3\pi i}, e^{2/3\pi i}, e^{\pi i}, e^{4/3\pi i}, e^{5/3\pi i})$

Ademas nos dice que w debe ser primitiva por lo tanto w^2, w^3, w^4, w^5 no debe ser igual que 1. esto ~~...~~ se respeta cuando $e^{\frac{2k\pi i}{6}}$ con $0\le k\le 5$ y $k \perp 6$ $\Rightarrow$ posibles w son $e^{1/3\pi i}$ y $e^{5/3\pi i}$ podriamos elegir cualquiera.

y ademas sabemos que si un polinomio tiene una raiz en $\mathbb{C}$ también debe ser una raiz su conjugado. $\Rightarrow$ ambas $e^{1/3\pi i}$ y $e^{5/3\pi i}$ deben ser raices ya que $\overline{e^{1/3\pi i}}=e^{5/3\pi i}$.

$f(x)=(x-e^{1/3\pi i})(x-e^{5/3\pi i})\cdot h(x)$.

- También sabemos que $(f:f')=x^2(x^2+1)$ $\Rightarrow$ podemos afirmar que $x^2,(x-i),(x+i)$ son factores de la factorizacion en $\mathbb{C}[x]$ tanto de f como de f' entonces podemos afirmar que $f(x)=x^2\cdot x(x-i)^2(x+i)^2$.

~~ya que tanto cero, como i y -i deben ser raices~~

Ya que ~~0~~ cero debe ser raiz triple de f porque es raiz doble de f' y i ~~y~~ $-i$ deben ser raices dobles porque son raices simples en f'.

Sigo en Otra hoja.

Hoja: 6

- Y por último sabemos que $x-\sqrt{3} \mid f$ en $\mathbb{R}[x]$ por lo tanto tanto $-\sqrt{3}$ como $\sqrt{3}$ deben ser raíces de f.

$\Rightarrow f(x) = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i)^2(x+i)^2 x^3 (x-e^{1/3\pi i})(x+e^{5/3\pi i})$.

Y es de grado mínimo ya que cumple con todos las características pedidas ~~y~~, los ~~polinomios~~ factores como $(x-\sqrt{3})$ y $(x-e^{5/3\pi i})$ son necesarios y obligatorios.

Factorización en $\mathbb{C}[x]$: $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i)^2(x+i)^2 x^3 (x-e^{1/3\pi i})(x\cancel{+}- e^{5/3\pi i})$ y todos sus factores son irreducibles porque son de grado 1.

Factorización en $\mathbb{R}[x]$: $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ ~~(x^2-3)~~ $(x^2+1)^2 x^3$ ~~[illegible]~~ $(x-e^{1/3\pi i})(x-e^{5/3\pi i})$ no llego por tiempo a hacer las cuentas

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\, x^3$ irreducibles por ser de grado 1.

$(x^2+1)^2\left[(x-e^{1/3\pi i})(x-e^{5/3\pi i})\right]$ irreducibles por no tener raíces en $\mathbb{R}$ y ser de grado 2

Factorización en $\mathbb{Q}[x] = (x^2-3)(x^2+1)^2 x^3 \overline{(x-e^{1/3\pi i})(x-e^{5/3\pi i})}$ no llego por tiempo a hacer las cuentas.

x^3 irreducible por ser de grado 1. $(x-0)^3$

$(x^2-3)(x^2+1)^2 \overline{(x-e^{1/3\pi i})(x-e^{5/3\pi i})}$ irreducibles por no tener raíces en $\mathbb{Q}$ y ser de grado 2.

NOTA

Hoja: 7

Ejercicio 4)

$f = X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2pX - p$ tiene que tener al menos una raiz en $\mathbb{Q}$

Siguiendo el metodo de Gauss para encontrar raices racionales vemos que las posibles raices son ± 1 y $\pm p$, es decir los divisores del último termino del polinomio

$\Rightarrow$ compruebo con $f(1) \Rightarrow 1 - 2 - 16 + 2p - p = 0$

$p = 17$ es una opción.

~~Compruebo con $(-1) \Rightarrow 1 + 2 - 16 - 2p - p = 0$~~

~~$-3p = 13$~~

~~$p = -\frac{13}{13}$ no es opción $-\frac{13}{3}$ no es primo.~~

ahora para comprobar que p sea raiz reemplazo en el polinomio.

$p^4 - 2p^3 - 16p^2 + 2p \cdot p - p = 0$

$p(p^3 - 2p^2 - 14p - 1) = 0$ / $p = 0$ no es opción (p debe ser primo)

ó $p^3 - 2p^2 - 14p - 1 = 0$ y ya que p debe ser primo y el metodo de Gauss nos dice que las únicas raices racionales posibles son 1 y -1, que no son primos vemos que p no puede ser raiz.

~~Análogamente con el caso de $(-p) \Rightarrow p^4 + 2p^3 - 16p^2 - 2p^2 - p = 0$~~

~~$p(p^3 + 2p^2 - 18p - 1) = 0$~~

~~$p = 0$ no es primo por lo tanto no es opción~~

~~tampoco existe p primo que satisfaga $p^3 + 2p^2 - 18p - 1 = 0$~~

Sigo otra hoja

$\Rightarrow$ Podemos afirmar que la única opción es $p=17$ Hoja: 8

$f: x^4-2x^3-16x^2+34x-17$ y $f(1)=0$.

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x^3-16x^2+34x-17 & x-1 \\ \hline -x^4+x^3 & x^3-x^2-17x+17 \\ \hline 0\quad -x^3-16x^2+34x-17 & \\ \quad x^3-x^2 & \\ \hline \quad\quad -17x^2+34x-17 & \\ \quad\quad +17x^2-17x & \\ \hline \quad\quad\quad 17x-17 & \\ \quad\quad\quad -17x+17 & \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 \checkmark & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^3-x^2-17x+17)$

$(x^3-x^2-17x+17)$ a simple vista vemos que 1 es raíz

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-17x+17 & x-1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2-17 \\ \hline \quad -17x+17 & \\ \quad +17x-17 & \\ \hline \quad\quad 0 \checkmark & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)^2(x^2-17)=(x-1)^2(x-\sqrt{17})(x+\sqrt{17})$

Sigo en otra hoja

NOTA

Hoja: 9

⊛ Factorización en $\mathbb{Q}_{[x]} = (x-1)^2(x^2-17)$

es irreducible en $\mathbb{Q}$ ya que $(x-1)$ es de grado 1 y (x^2-17) ~~para~~ no presenta raices en $\mathbb{Q}$ y es de grado 2.

⊛ Factorización en ~~$\mathbb{R}_{[x]}$~~ $\mathbb{C}_{[x]} = (x-1)^2(x-\sqrt{17})(x+\sqrt{17})$.

es irreducible ya que ~~no~~ todos sus ~~términos~~ factores son de grado 1.