Corrigió JAVIER ALTAUZ.

UBA – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Departamento de Computación– Algoritmos y Estructuras de Datos I
Primer parcial – Segundo cuatrimestre de 2022

1c	1a	1b	2a	2b	3a	3b
5	10	5	10	30	10	30

Apellido Culaciati **Nombre** Dante
LU 351/22 **Cant. de hojas entregadas** 5

El parcial se aprueba con 65 puntos.

100 Aprobado

Ejercicio 1. [20 puntos] Dados los siguientes predicados y programas.

- pred $ordenada(l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{|l| > 0 \land (\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i < |l| \longrightarrow_L l[i-1] \leq l[i])\}$
- pred $masChicoAlPrincipio(l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{|l| > 0 \land_L (\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i < |l| \longrightarrow_L l[0] \leq l[i]\}$
- pred $unoSolo(l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{|l| = 1\}$

```
int programa1(vector<int> v) {
  return v[v.size()-1];
}
```

```
int programa2(vector<int> v) {
  return v[0];
}
```

a) [10 puntos] ¿Cuál es la relación de fuerza entre los predicados? ¿Cuál es el más débil y cuál el más fuerte? Justificar.

b) [5 puntos] ¿Cuál de los predicados dados es la precondición más débil que puede darse para que **programa1** sea correcto si se devuelve un entero res y la postcondición es $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \longrightarrow_L res \geq l[i])$? Justifique.

c) [5 puntos] ¿Cuál de los predicados dados es la precondición más débil que puede darse para que **programa2** sea correcto si se devuelve un entero res y la postcondición es $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \longrightarrow_L res \leq l[i])$? Justifique.

Ejercicio 2. [40 puntos] Se llama *tripla pitagórica* a tres números enteros a, b, y c que satisfacen la ecuación del teorema de Pitágoras ($a^2 + b^2 = c^2$). Especificaremos estas triplas como tuplas de 3 elementos tales que $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Por ejemplo, (9, 12, 15) y (12,16,20) son triplas pitagóricas. La tupla $t = (12, 9, 15)$ no lo es porque $t_1 < t_0$.

a) [10 puntos] Especificar el predicado esTriplaPitagorica($t : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) que indica si t cumple las propiedades necesarias para ser una tripla pitagórica.

b) [30 puntos] Especificar el problema armarTriplasPitagoricas(in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out res: $seq\langle\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\rangle$), que dada una secuencia de enteros s devuelve una secuencia que contiene todas las triplas pitagóricas contenidas en s. Por ejemplo, dada $s = < 4, 4, 5, 3, 1 >$ debería devolver $< (3, 4, 5) >$, y dado $s = < 20, 16, 7, 12, 9, 15, 8 >$ se podría devolver $< (12, 16, 20), (9, 12, 15) >$. Notar que los elementos de la secuencia original pueden estar en más de una tripla pitagórica.

Ejercicio 3. [40 puntos] El señor X tiene un local en el que vende productos que compra a un mayorista agregando un margen de ganancia. Por ejemplo, puede comprar cierto producto a \$40 y venderlo a \$50, ganando \$10. El mayorista le pasa la lista de precios y el señor X arma otro listado en el cual registra a qué precio puede vender cada producto. Por ejemplo, la secuencia $< (10, 11), (10, 12), (15, 17) >$ indica que puede conseguir 2 productos a \$10, y puede vender uno de ellos a \$11 y el otro a \$12. Además, hay otro producto que puede comprar a \$15 y vender a \$17.

a) [10 puntos] Escribir un predicado que dada una lista s de productos con sus precios de compra y venta, y un presupuesto p indique si es posible comprar en el mayorista todos los productos de la lista. Por ejemplo, dados $s = < (10, 11), (10, 12), (15, 17) >$ y $p = 38$, el predicado es verdadero. Pero dados $s = < (10, 11), (10, 12), (15, 17) >$ y $p = 21$ el predicado es falso.

b) [30 puntos] Especificar un problema que dado un presupuesto y una lista de precios de compra y venta de productos que generan ganancia, indique cuál es la mayor ganancia que podría obtener el señor X. Por ejemplo, dados $p = 22$ y $s = < (10, 11), (10, 12), (17, 19) >$ la mayor ganancia que puede obtener es 3 (comprando los primeros 2 productos), pero si el presupuesto fuera 18, la mayor ganancia sería 2 (comprando el segundo o el último). Y si el presupuesto fuera 27 la mayor gancia sería 4 (comprando los dos últimos).

DANTE CULACIATI | DNI: 45.428.879 LU: 351/22 | (TURNO MAÑANA) | HOJA Nº 1 FECHA 16/09/22

1) a) Tengo 3 predicados, ordenado, masChicoAlPrincipio, y unoSolo. Quiero determinar su relación de fuerza.

En primer lugar, recuerdo que un predicado A es más fuerte que otro predicado B, cuando $A \rightarrow B$ es una tautología (es decir, vale siempre).

Analizo qué significa cada predicado.

- ordenado se fija si cada elemento de una secuencia (de enteros) l, cuya longitud debe ser mayor a cero, es mayor o igual al elemento anterior (es decir, si está ordenado de menor a mayor).

- masChicoAlPrincipio se fija si el primer elemento de una secuencia de enteros l, cuya longitud debe ser mayor a cero, es menor o igual a todos los demás elementos (es decir, es el más chico).

- unoSolo se fija si la longitud de una secuencia de enteros l es igual a 1 (es decir, tiene un solo elemento).

Observo que:

(RELACIÓN DE FUERZA)

$\boxed{\text{unoSolo} \rightarrow \text{ordenado} \rightarrow \text{masChicoAlPrincipio}}$

- Pues, si tengo un sólo elemento, la lista está necesariamente ordenada, y además, el elemento del principio es el más chico. (unoSolo → ordenado)
- Si la lista está ordenada, no sé cuantos elementos tiene (ordenado ↛ unoSolo), pero como está ordenado de menor a mayor, el elemento más chico necesariamente está al principio (ordenado → masChico Al Principio).

NOTA

(Sigue a la vuelta)

• Por último, si tengo el elemento más chico al principio, no sé nada sobre el tamaño de la lista (masChicoAlPrincipio $\not\Rightarrow$ unoSolo), ni sobre su orden total (masChicoAlPrincipio $\not\Rightarrow$ ordenada).

Por lo tanto, unoSolo es el predicado más fuerte, y masChicoAlPrincipio es el predicado más débil.

b) Tengo un programa programa1, y quiero ver cuál es la precondición más débil que puede darse para que programa1 sea correcto si se devuelve un entero res, y la postcondición es

$$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \longrightarrow_L res \geq l[i]).$$

Analizo qué hace programa1, y qué significa la postcondición.

• programa1 toma un vector de enteros V, y devuelve el elemento V[V.size() - 1] (es decir, devuelve su último elemento).

• La postcondición "pide" que res sea mayor o igual a todos los elementos de l (una secuencia de enteros).

En conclusión, quiero que el último elemento de una secuencia de enteros l (la cual después es "pasada" a programa1 con el nombre V), sea mayor o igual al resto de los elementos.

La precondición más débil que cumple esto es ordenada (pues al estar l ordenada de menor a mayor, el elemento más grande necesariamente está al final).

(Sigue en hoja 2)

DANTE CULACIATI
DNI: 45.429.379
LU: 351/22

(TURNO MAÑANA)

HOJA Nº 2

FECHA 16/09/22

unoSolo no es válido pues es más fuerte que ordenado, y masChicoAlPrincipio tampoco pues no me asegura nada del último elemento.

c) Tengo un programa programa2, y quiero ver cuál es la precondición más débil que puede darse para que programa2 sea correcto si se devuelve un entero res, y la postcondición es

$$(\forall i: \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L res \leq l[i])$$

Notemos la similitud con el problema anterior.

Analizo qué hace programa2, y qué significa la postcondición.

- programa2 toma un vector de enteros v, y devuelve el elemento v[0] (es decir, su primer elemento)

- La postcondición "pide" que res sea menor o igual a todos los elementos de l (una secuencia de enteros).

En conclusión, quiero que el primer elemento de una secuencia de enteros l (la cual después es "pasada" a programa2 con el nombre v) sea menor o igual al resto de los elementos.

La precondición más débil que cumple esto es masChicoAlPrincipio (pues, como su nombre lo indica, asegura que el primer elemento sea el más chico, lo que implica que es menor o igual al resto de elementos).

Tanto unoSolo como ordenado no son válidas, pues son más fuertes que masChicoAlPrincipio.

(Ejercicio 2 en hoja 3).

NOTA

Dante Culaciati | DNI: 45.428.879 | LU: 351/22 | (TURNO MAÑANA) | HOJA N° 3 | FECHA 16/07/22

2) a) Tengo que especificar el predicado esTriplaPitagórica, que indica si t cumple las propiedades necesarias para ser una tripla pitagórica.

Antes de escribir el predicado, notamos que, según el enunciado del ejercicio, una tripla pitagórica son tres números enteros a, b y c tales que $a^2+b^2=c^2$, representadas por una tripla $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. (Además, según lo dicho en el examen, de manera verbal, t_0, t_1 y t_2 deben ser positivos). (Asumo que (t_0) representa a (a), (t_1) a (b) y (t_2) a (c))

Si observamos bien, ya tenemos resuelto el predicado, sólo falta pasar lo que escribí a símbolos lógicos.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pred esTriplaPitagórica}(t:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\{\\ \quad (t_0>0) \land (t_0 \leq t_1 \leq t_2) \land ((t_0)^2+(t_1)^2=(t_2)^2)\\ \}\end{array}}$$

→ (Pequeña aclaración en hoja 4) *

b) Tengo que especificar el problema armarTriplasPitagóricas, que dado una secuencia de enteros S, devuelve una secuencia que contiene todas las triplas pitagóricas contenidas en S.

Antes de especificar el problema, analizo qué propiedades deben cumplir el parámetro de entrada S: Seq⟨$\mathbb{Z}$⟩, para que se considere "válido", y qué propiedades debe cumplir el parámetro de salida res: Seq⟨$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$⟩, para también ser considerado válido.

(Sigue a la vuelta)

NOTA

- <u>S</u> debe ser una secuencia de enteros <u>positivos</u>, pues una condición mínima para las triplas pitagóricas es que todos sus elementos sean positivas.

(Aclaro que también consideraría que tendría sentido <u>No</u> pedir nada de S, pero consulté durante el examen y llegamos a la conclusión de que, siempre y cuando hago una aclaración como ésta, pedirle ésta condición a S es válido)

- <u>res</u> debe contener todas las triplas pitagóricas que se pueden formar con los elementos de S. (Y no debería contener nada más).

Notemos que para realizar esto, puedo considerar a todas las triplas pitagóricas posibles, y quedarme sólo con aquellas que estén contenidas en S.

Si observamos bien, el problema ya está resuelto, sólo falta pasarlo a símbolos lógicos.

proc armarTriplasPitagóricas(in S: $seq\langle \mathbb{Z} \rangle$, out res: $seq\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle$){

Pre$\{(\forall x : \mathbb{Z})(x \in S \rightarrow x > 0)\}$

Post$\{(\forall t : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})($esTriplaPitagórica$(t) \wedge$ contieneTripla$(S,t) \leftrightarrow t \in res)\}$

}

Notemos la falta de conectores de semántica trivaluada ($\wedge_L, \vee_L, \rightarrow_L$, etc.), debido a su innecesidad, ya que no existe la posibilidad de que se indefina algún predicado o expresión.

<u>esTriplaPitagórica</u> es el predicado definido en el ejercicio a).

Defino ahora <u>contieneTripla</u>, que, como el nombre sugiere, indica si la secuencia S contiene a la tripla t.

(Sigue en hoja 7)

NOTA

DANTE CULACIATI | DNI: 45.120.879 | LU: 351/22 | (TURNO MAÑANA) | HOJA N° 4 | FECHA 16/07/22

pred contieneTripla(s: seq⟨$\mathbb{Z}$⟩, t: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) {

$(t_0 \in s) \land (t_1 \in s) \land (t_2 \in s)$

}

Considero necesario aclarar el uso del "$\leftrightarrow$" en armarTriplasPitagóricas. En pocas palabras, esto permite que si una tripla cualquiera es pitagórica y está contenida en s, entonces ~~[illegible]~~ es un elemento de res, y ~~[illegible]~~ viceversa (todos los elementos de res son triplas pitagóricas, contenidas en s, sin excepción).

(Ejercicio 3 en hoja 5)

(*) (Aclaración de ejercicio a)): En el predicado, solo pido que (t_0) sea mayor a cero, pues si $(t_0 > 0)$ y $(t_0 \leq t_1 \leq t_2)$, entonces tanto (t_0) como (t_1) y (t_2) son positivos.

¡¡Excelente!!

Muy Buena explicación

NOTA

Dante Culaciati | DNI: 45.129.979 (TURNO MAÑANA) | HOJA N° 5
LU: 351/22 | FECHA 16/09/22

3) a) Quiero escribir un predicado que dado una lista S de productos, con sus precios de compra y venta, y un presupuesto P, indique si es posible comprar en el mayorista todos los productos de la lista.

Antes de comenzar, notemos que represento a esta lista de precios como una secuencia de tuplas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde, tomando como ejemplo una tupla t,

t_0 representa el precio de compra.

t_1 representa el precio de venta.

Analizo qué debe pedir el predicado.

El predicado toma una lista de precios S, y un presupuesto P, y si la suma de los precios de compra de todos los elementos de la lista es menor o igual a P, el predicado es válido, y si no, no es válido.

Notemos que el problema ya está resuelto, sólo falta pasarlo a ~~[illegible]~~ símbolos lógicos.

```
pred sePuedenComprar(S: Seq<ℤ×ℤ>, P: ℤ){
    sumaDePrecios(S) ≤ P
}
```

(y devuelve esa suma)

Defino ahora "sumaDePrecios", que suma todos los precios de compra en S

aux sumaDePrecios(S: seq⟨$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$⟩) $: \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|S|-1} (S[i]_0)$;

(Sigue a la vuelta).

b) Quiero especificar un problema que dado un presupuesto y una lista de precios de compra y venta de productos que generan ganancia, indique cual es la mayor ganancia posible.

Analizo qué me pide el problema.

Primero, quiero que ~~en~~ la lista de productos ~~inicial~~ inicial, todos generen ganancias (es decir, $t_1 > t_0$). No le pido nada a el presupuesto.

~~Luego, quiero que la mayor~~

proc devolverMayorGanancia(in p: $\mathbb{Z}$, in s: $seq\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle$, out x: $\mathbb{Z}$) {

  Pre{ $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L$ generaGanancia$(s[i]))$ }

  Post{ ~~$(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow$~~

    $(\forall t: seq\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle)($existeEn$(t,s) \land$ sePuedenComprar$(t,p) \rightarrow_L$

      ganancia$(t) \leq x) \land$

    $(\exists y: seq\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle)($existeEn$(y,s) \land$ ganancia$(y) = x)$

      ∧ SePuedeComprar(y,p) ∧

  }

}

pred generaGanancia(t: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$){ $t_1 > t_0$ }

pred existeEn(t: $seq\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle$, s: $seq\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle$){

  $(\forall x: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})(x \in t \rightarrow x \in s)$

}

aux ganancia(t: $seq\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rangle$) : $\mathbb{Z}$ = [redacted]

$$\sum_{i=0}^{|t|-1} \left(t[i]_1 - t[i]_0 \right)$$; (valor de venta - valor de compra)

En conclusión para toda subsecuencia de s que se puede comprar, x es mayor o igual a su ~~ganancia~~ GANANCIA, y existe alguna subsecuencia cuya ganancia es x.