

## Álgebra I

Primer Cuatrimestre - Primer Parcial - 19/5/2017

1. Sea  $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$ . En  $\mathcal{P}(X)$  se define la relación  $\mathcal{R}$  de la forma:

$$ARB \iff A - B \subset \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}.$$

- a) Determinar si  $\mathcal{R}$  es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.  
b) Sea  $A = \{n \in X : n \text{ es par}\}$ . ¿Cuántos conjuntos  $B \in \mathcal{P}(X)$  satisfacen simultáneamente  $ARB$  y  $\#(A \cap B) = 7$ ?

2. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 5 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2(2n+1)}{9(n+2)} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que

$$a_n \geq \frac{1}{3^{n-1}} \binom{2n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Determinar cuántas funciones  $f: \{1, 2, 3, \dots, 9\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 45\}$  satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

- (i)  $f$  es inyectiva.  
(ii)  $f(8) \leq 10$ .  
(iii)  $f(3) + f(4) = 23$ .

4. a) Probar que  $12345^{5n} - 1$  es divisible por 11 para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  que satisfacen que el resto de  $12345^{2017} + 2817a^2 + 304$  en división por 11 es 8.

5. Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(9 : 6a) = 3$  y  $(2a + a^2 : a^3 - 4a + 3)$  sea distinto de 1.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.  
Justifique todas sus respuestas.