

Álgebra I

Primer Cuatrimestre - Primer Parcial - 19/5/2017

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación \mathcal{R} de la forma:

$$ARB \iff A - B \subset \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}.$$

- a) Determinar si \mathcal{R} es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
b) Sea $A = \{n \in X : n \text{ es par}\}$. ¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ satisfacen simultáneamente ARB y $\#(A \cap B) = 7$?

2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 5 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2(2n+1)}{9(n+2)} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que

$$a_n \geq \frac{1}{3^{n-1}} \binom{2n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Determinar cuántas funciones $f: \{1, 2, 3, \dots, 9\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 45\}$ satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

- (i) f es inyectiva.
(ii) $f(8) \leq 10$.
(iii) $f(3) + f(4) = 23$.

4. a) Probar que $12345^{5n} - 1$ es divisible por 11 para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que el resto de $12345^{2017} + 2817a^2 + 304$ en división por 11 es 8.

5. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(9 : 6a) = 3$ y $(2a + a^2 : a^3 - 4a + 3)$ sea distinto de 1.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.