Probabilidad y Estadística | Segundo Parcial | Verano 2016

Nombre y apellido.. Número de libreta..........

Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega

Entrego ejercicios 1 2 3 4

1	2	3	4	Nota
22	32	8	12	74

(Reservado para el corrector):

A

Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido. *Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.*

Ej 1. *(23 p.)* Una cadena de pizzerías con 144 sucursales en la ciudad lleva una estadística del tiempo T transcurrido entre el horario de apertura de la sucursal y el momento en que está lista la primera pizza para delivery; de ese modo, puede calcular cuál es el mejor horario para que comiencen a trabajar los repartidores. Se sabe que el tiempo T_1 transcurrido (en minutos) hasta que se recibe el primer pedido de la noche sigue una distribución $\mathcal{E}(1/10)$, mientras que el tiempo T_2 que tarda en prepararse la primera pizza sigue una distribución $N(20, 4)$. Además, si el pedido llega muy temprano es más probable que tarde más por cuestiones de preparación de la cocina, y menos si llega más tarde, lo que se traduce en un coeficiente de correlación negativo entre ambas variables $\rho = -0,4$.

(a) *(4 p.)* Hallar $E(T)$ y $Var(T)$.

(b) *(6 p.)* Aproximar la probabilidad de que una noche el promedio de los tiempos T de cada sucursal sea superior a 28 minutos, es decir, $P(\frac{1}{144}\sum_{i=1}^{144} T_i > 28)$.

(c) *(5 p.)* Probar que existe un número de sucursales tal que $P(29,99 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i < 30,01) > 0,9999$.

(d) *(~~7~~ p.)* Para comparar situaciones entre sucursales, se tomaron una noche al azar los tiempos T de las once sucursales más rápidas, y se obtuvo:

8 pts

$$15, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 22, 24, 25$$

Hallar la mediana, la media 0,3-podada y la la distancia intercuartil o la distancia intercuartos (aclarando cuál se calcula).

Ej 2. *(33 p.)* Se toma una muestra aleatoria $X_1, ..., X_n$ de una distribución con densidad

$$f_X(x) = 3\frac{x^2}{\theta^3} I_{[0,\theta]}(x)$$

(a) *(5 p.)* Hallar $\hat{\theta}_M$, el estimador de momentos de θ.

(b) *(5 p.)* Analizar si $\hat{\theta}_M$ es un estimador insesgado o asintóticamente insesgado de θ.

(c) *(5 p.)* Analizar si $\hat{\theta}_M$ es un estimador consistente de θ.

(d) *(6 p.)* Hallar $\hat{\theta}_{MV}$, el estimador de ~~momentos~~ de θ.

MAXIMA VEROSIMILITUD

(e) *(6 p.)* Analizar si $\hat{\theta}_{MV}$ es un estimador insesgado o asintóticamente insesgado de θ.

(f) *(6 p.)* Analizar si $\hat{\theta}_{MV}$ es un estimador consistente de θ.

Ej 3. *(17 p.)* Una consultora desea saber el nivel de apoyo a una eventual reforma impositiva que propone el gobierno, para lo cual decide tomar una muestra de tamaño 100, de la que resultan 56 respuestas de apoyo.

(a) *(6 p.)* Explicar cuál es un pivote adecuado para el parámetro p, que representa la proporción de personas que apoyan la reforma y deducir la expresión de un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$.

(b) *(5 p.)* En base a los resultados obtenidos por la encuestadora, hallar un intervalo de confianza de nivel $0,9$ para la proporción de personas que apoyan la reforma.

(c) *(6 p.)* Hallar un tamaño de muestra que garantice una confianza de $0,99$ y un intervalo de longitud no superior a $0,01$.

Ej 4. *(27 p.)* Una máquina de envasado de bebidas llena botellas cuyo contenido nominal (el que figura en la etiqueta) es de $1,5l$. Una organización de defensa al consumidor presume que en promedio la máquina llena las botellas por debajo de ese valor, para lo cual realiza una medición sobre 20 botellas y obtiene un valor promedio de $1,4l$ y un desvío de $0,05l$. Se sabe por especificaciones del fabricante que la distribución del contenido de las botellas resulta normal. Por los riesgos que implica hacer públicamente una denuncia infudada, la organización quiere que la probabilidad de hacer la denuncia cuando en realidad la máquina funciona correctamente sea a lo sumo $0,01$.

(a) *(6 p.)* Plantear un conjunto de hipótesis adecuadas para el problema.

(b) *(6 p.)* Indicar si en base a los datos obtenidos la organización debe o no hacer la denuncia.

(c) *(7 p.)* Hallar la probabilidad de que, al tomar una nueva muestra, se omita hacer una denuncia si la máquina llena botellas con un promedio de $\underline{1,45l}_{4}$. SUPONIENDO $\sigma = 0,15$

(d) *(8 p.)* Calcular n tal que la probabilidad del ítem anterior sea a lo sumo $0,05$.

JONATHAN SEIJO

HOJA Nº 1

FECHA

① a) $T_1 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{10}\right)$

$T_2 \sim N(20, 4)$

a) $T = T_1 + T_2$.

$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 10 + 20 = 30$.

4/4

$$\rho = -0{,}4 = \frac{Cov(T_1, T_2)}{\sigma_{T_1}\,\sigma_{T_2}} \qquad V(T_1) = \frac{1}{\frac{1}{(10)^2}} = 100 \to \sigma_1 = 10$$

$$V(T_2) = 4 \to \sigma_{T_2} = 2.$$

$$-0{,}4 = \frac{Cov(T_1, T_2)}{10 \times 2}$$

$$Cov(T_1, T_2) = -8$$

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) + 2\,Cov(T_1, T_2)$$

$$= 100 + 4 - 16 = 88$$

$\Rightarrow$ $\underline{E(T) = 30}$, $\underline{V(T) = 88}$.

b) Como $E(T) = 30$ y $V(T) < +\infty$,

Por el teorema central del límite,

5/6

$$\sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i - E(T)}{\sigma_T}\right) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$P\left(\frac{1}{144}\sum_{i=1}^{144} T_i > 28\right) = P\left(\sqrt{144}\,\frac{\left(\frac{1}{144}\sum_{i=1}^{144} T_i - 30\right)}{\sqrt{80}} > \frac{\sqrt{144}\,(28-30)}{\sqrt{80}}\right)$$

88

y como considero que $n = 144$ es lo suficientemente grande, aproximo con $N(0,1)$.

$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{144}\,(28-30)}{\sqrt{80}}\right) \simeq 1 - \Phi(-2{,}68) = \Phi(2{,}68)$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{144}\sum_{i=1}^{144} T_i > 28\right) \simeq 0{,}9963}$$

(Arrastra error)

NOTA

c)

5/5

$$P\left(29,99 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i < 30,01\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{T}$$

$$= P(-0,01 + 30 < \bar{T} < 0,01 + 30)$$

$$= P(-0,01 < \bar{T} - 30 < 0,01)$$

$$= P(|\bar{T} - 30| < 0,01)$$

~~Como~~ ~~[illegible]~~,

Como $E(\bar{T}) = 30$ y $V(\bar{T}) = \frac{V(T)}{n} = \frac{88}{n} < +\infty$.

Por Tchevichef.

$$P(|\bar{T} - 30| < 0,01) \geq 1 - \frac{88}{n(0,01)^2} \qquad \left(1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right).$$

Existe n tq $1 - \frac{88}{n(0,01)^2} \cancel{\geq}\ 0,9999$

$$(0,01)^2 = \frac{88}{n(0,01)^2}$$

$$n = \frac{88}{(0,01)^4}$$

Si $n \geq \frac{88}{(0,01)^4}$,

$$P\left(29,99 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i < 30,01\right) > 0,9999$$

d) 15 17 18 [18 19 | 19 19 20] 22 24 25

8/8

· mediana: $x_{0.50}$, que se encuentra en posicion $0.50 \times (12) = 6$.

$\Rightarrow$ MEDIANA = 19

$11 \times 0.3 = 3,3$. quito 3 de c/ lado y calculo promedio

$$\alpha \text{ 0.3 podado} = \frac{18 + 19 + 19 + 19 + 20}{5} = \boxed{19}$$

distancia intercuartil: $x_{0.75} - x_{0.25} = 22 - 18 = \boxed{4}$

$(0.75 \times 12 = 9$; $0.25 \times 12 = 3)$

NOTA

JONATHAN SEIJO.

HOJA N° 2

FECHA

②

$$f_X(x) = 3\frac{x^2}{\theta^3} I_{[0,\theta]}(x)$$

a) Hallar $\hat{\theta}_M$ estimador de momentos

5/5

$$E(X) = \int_0^\theta x \cdot 3\frac{x^2}{\theta^3}\,dx = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3\,dx = \frac{3}{\theta^3}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\theta}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{3}{4}\theta}$$

Hallo $\hat{\theta}_M$ usando el momento de orden 1

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = E(X)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{3}{4}\theta$$

$$\boxed{\hat{\theta}_M = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

b) ¿insesgado?

5/5

$$E(\hat{\theta}_M) = E\left(\frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{4}{3n}\sum_{i}^{n} E(x_i) = \frac{4}{3}E(X) = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\theta$$

$$\underline{E(\hat{\theta}_M) = \theta}$$

El estimador de momentos es insesgado (y también asintót. insesgado)

c) ¿consistente?

5/5

$$V(\hat{\theta}_M) = V\left(\frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \underset{x_i \text{ son iid}}{=} \frac{4^2}{3^2 n^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{16}{9n}V(X)$$

Quiero hallar $V(X)$.

NOTA

$$E(x^2) = \int_0^{\theta} x^2 \, 3\frac{x^2}{\theta^3} \, dx = \frac{3}{\theta^3}\int_0^{\theta} x^4 \, dx = \frac{3}{\theta^3}\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\theta}$$

$$E(x^2) = \frac{3}{5}\theta^2 .$$

$$\rightarrow V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= \frac{3}{5}\theta^2 - \frac{3^2\theta^2}{4^2}$$

entonces, $$V(\hat{\theta}_M) = \frac{16}{9n} V(x) = \frac{16}{9n}\left(\frac{3}{5}\theta^2 - \frac{9}{16}\theta^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Como $E(\hat{\theta}_M) = \theta$ y $V(\hat{\theta}_M) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \hat{\theta}_M$ es consistente.

d) $\hat{\theta}_{MV}$ (máximo verosimilitud)

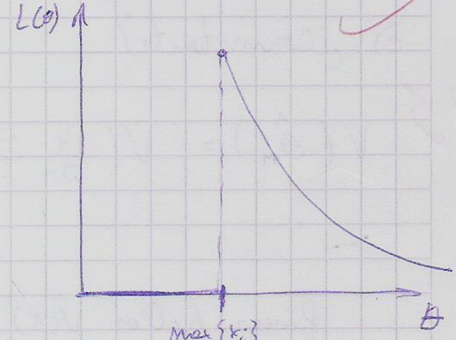
6

Como los x_i son iid,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 3\frac{x_i^2}{\theta^3} I_{[0,\theta]}(x_i)$$

$$L(\theta) = \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{[0,\theta]}(x_i)$$

Para que $\left(\prod_{i=1}^{n} I_{[0,\theta]}(x_i)\right)$ sea $\neq 0$, todos los x_i deben ser menores a θ, en particular $\Leftrightarrow$ $\max\{x_i\} \leq \theta$.



$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{3^n}{\theta^{3n}} \prod_{i=1}^{n} x_i^2 & \text{si } \max\{x_i\} \leq \theta \\ 0 & \text{si } \max\{x_i\} > \theta \end{cases}$$

el máximo de $L(\theta)$ se alcanza en $\max\{x_i\}$. $\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \max\{x_i\}}$

NOTA

JONATHAN
SEIJO

HOJA N° 3

FECHA

② e) ¿$\hat{\theta}_{MV}$ insesgado?

5/6

Primero hallo $F_x(t)$.

Si $t < 0$, $F_x(t) = 0$

Si $t > \theta$, $F_x(t) = 1$

Si $0 \le t \le \theta$,

$$F_x(t) = \int_0^t \frac{3x^2}{\theta^3}\, dx = \frac{3}{\theta^3} \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=t} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^3 & \text{si } 0\le t\le\theta \\ 1 & \text{si } \theta<t. \end{cases}}$$

Según lo visto en clase, la función de distribución del máximo está dada por:

$$F_{\max\{x_i\}}(t) = [F_x(t)]^n \quad \text{y como } \hat{\theta}_{MV} = \max\{x_i\}$$

$$F_{\hat{\theta}_{MV}}(t) = [F_x(t)]^n$$

derivo para obtener la densidad,

$$f_{\hat{\theta}_{MV}}(t) = n\,[F_x(t)]^{n-1} \cdot f_x(t).$$

$$f_{\hat{\theta}_{MV}}(t) = n \left(\frac{t}{\theta}\right)^{3n-1} \cdot 3\frac{t^2}{\theta^3} \cdot I_{[0,\theta]}(t)$$

3n − 3

$$f_{\hat{\theta}_{MV}}(t) = 3n\, t^{3n+1} \cdot \frac{1}{\theta^{3n+2}}\, I_{[0,\theta]}(t)$$

3n − 1

3n

↳ detrás.

NOTA

$$E(\hat{\theta}_{MV}) = \int_0^\theta t \cdot 3n \, t^{3n+1} \frac{1}{\theta^{3n+2}} \, dt$$

$$= \frac{3n}{\theta^{3n+2}} \int_0^\theta t^{3n+2} \, dt$$

$$= \frac{3n}{\theta^{3n+2}} \left(\frac{t^{3n+3}}{3n+3} \right) \Big|_{t=0}^{t=\theta} = \frac{3n}{\theta^{3n+2}} \frac{\theta^{3n+3}}{3n+3}$$

$$= \frac{3n\theta}{3n+3} = \boxed{\frac{n\theta}{n+1}}$$

$E(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{n}{n+1}\theta \Rightarrow$ No es insesgado.

(Arrastra error)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\theta = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}\,1}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}\theta = \theta.$$

$\hat{\theta}_{MV}$ <u>si</u> es Asintoticamente insesgado.

f) $\hat{\theta}_{MV}$ consistente?

$$E(\hat{\theta}_{MV}^2) = \int_0^\theta t^2 \, 3n \, t^{3n+1} \frac{1}{\theta^{3n+2}} \, dt = \frac{3n}{\theta^{3n+2}} \int_0^\theta t^{3n+3} \, dt$$

$$= \frac{3n}{\theta^{3n+2}} \frac{\theta^{3n+4}}{3n+4} = \frac{3n}{3n+4}\theta^2$$

$$V(\hat{\theta}_{MV}) = E(\hat{\theta}_{MV}^2) - (E(\hat{\theta}_{MV}))^2 = \frac{3n}{3n+4}\theta^2 - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}$$

$$= \theta^2 \left(\underbrace{\underbrace{\frac{3n}{3n+4}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} - \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \right)$$

(Arrastra error)

$V(\hat{\theta}_{MV}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Como $E(\hat{\theta}_{MV}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta$ y $V(\hat{\theta}_{MV}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV}$ es consistente.

JONATHAN SEIJO

HOJA Nº 4

FECHA

③

a) X_i: "Se realiza encuesta a una persona".

6/6

$X \sim Be(P)$

$E(X) = P$, $V(X) = P(1-P) < +\infty$,

Por el Teorema central del límite,

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - P\right)}{\sqrt{P(1-P)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Y como mi n es 100, lo considero una buena aproximación.

Para que sea más simple el despeje, uso que $\frac{\cancel{\sqrt{P(1-P)}}}{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}} \frac{(\bar{P}-P)\sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{P(1-P)}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

Uso el pivote $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{P}-P)}{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}} \xrightarrow{D} \sim N(0,1)$.

Busco que mi intervalo de confianza de P sea $1-\alpha$,

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{P}-P)}{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

$$P\left(-\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}} < \bar{P}-P < \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{P} - \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}} < P < \bar{P} + \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

El intervalo de confianza para P nivel $1-\alpha$ (asintótico) es

$$\left(\bar{P} - \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}} ; \bar{P} + \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}}\right).$$

NOTA

JONATHAN SEIJO

HOJA Nº 5

FECHA

(4)

Función característica

a) P(Hacer denuncia | $\mu = 1{,}5$) = 0.01

6/6

$H_0 : \mu = 1{,}5$ No hago denuncia

$H_1 : \mu < 1{,}5$ Hago denuncia.

X : Contenido de botella.

$n = 20$ $\bar{x} = 1{,}4$ $S = 0.05$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$T = \frac{\sqrt{n-1}\,(\bar{x} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$$

Suponiendo $\mu = 1{,}5$,

Rechazo H_0 si $T < -t_{n-1;0.01}$

$$\frac{\sqrt{n-1}\,(\bar{x} - \mu)}{S} < -t_{n-1;0.01}.$$

b) 6/6

Hago denuncia si: $\sqrt{19}\left(\frac{1{,}4 - 1{,}5}{0.05}\right) < -1{,}7291$

$-8{,}71 < -1{,}7291$

⇒ La organización debe hacer la denuncia.

c) 0/7

Hago denuncia si: $T < -t_{n-1;0.01}$

$$\frac{\sqrt{n-1}\,(\bar{x} - \mu)}{S} < -t_{n-1;0.01}$$

Hago denuncia si. $\bar{x} < -t_{n-1;0.01}\frac{S}{\sqrt{n-1}} + \mu.$

Quiero hallar P(No hacer denuncia | $\mu = 1{,}45$).

NO. CAMBIA LA REGLA

↳ otra

NOTA