1	2	3	4	5	Calif.
B	B	B	B	B	A

Apellido y Nombre:
Turno: ~~N~~ Mañana (8

Álgebra I - 2do Cuatrimestre 2016

Primer Recuperatorio del Primer Parcial - 06/12/2016

1. Sea A el conjunto formado por todas las funciones $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Definimos la relación $\mathcal{R}$ en A dada por

$$f\mathcal{R}g \iff \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} g(i).$$

   a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

   b) Sea $g \in A$ la función tal que $g(i) = 1$ para todo $i \leq 7$ y $g(8) = 2$. Hallar la cantidad de funciones $f \in A$ tales que $f\mathcal{R}g$.

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}.$$

3. Una fragata parte de Jamaica con 13 piratas para atacar 3 puertos.

   a) ¿De cuántas maneras pueden desembarcar cuatro piratas en Portobelo, cuatro en Maracaibo y cinco en Gibraltar?

   b) ¿De cuántas maneras pueden desembarcar exactamente seis piratas en Portobelo, y al menos un pirata en cada uno de los otros dos puertos?

4. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27.$$

5. Para cada $a \in \mathbb{Z}$, calcular $(a^3 + 2a : 2a^4 + 6a^2 + 2)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Recuperatorio Primer Parcial.

ej 4

Probar que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$169 \mid 3^{3m+3} - 26m - 27.$$

Hago inducción.

•) $m=1$ $P(1)$ es V ✓ $\quad 169 \mid 3^{3+3} - 26.1 - 27 = 676$ ✓

$$676 = 169.4 \ ✓.$$

•) $P(m) \Rightarrow P(m+1)$

HI: $169 \mid 3^{3m+3} - 26m - 27.$

qvq $\quad 169 \mid 3^{3(m+1)+3} - 26(m+1) - 27.$

$$169 \mid 3^{3m+6} - 26(m+1) - 27.$$

Por Hipótesis inductiva.

$$3^{m+3} - 26m - 27 \equiv 0 \ (169)$$

$$3^{m+3} \equiv 26m + 27 \ (169).$$

multiplico x 3^3 porque $3^3 \equiv 3^3 (169)$

$$3^{m+3}.3^3 \equiv 26m.3^3 + 27.3^3 \ (169).$$

resto a ambos miembros.

$$3^{m+6} - 26(m+1) - 27 \equiv 26m.3^3 + 27.3^3 - 26(m+1) - 27 \ (169)$$

$$3^{m+6} - 26(m+1) - 27 \equiv 702m + 729 - 26m - 26 - 27$$

$$\equiv 676m + 676 \equiv 0 \ (169)$$

$169 \mid 676$

$169 \mid 676m$ $\rightarrow 169 \mid 676m + 676.$

Por lo tanto como la congruencia es transitiva

$\Rightarrow \quad 3^{m+6} - 26(m+1) - 27 \equiv 0 \ (169).$

$P(m+1)$ es V $\Rightarrow$ por inducción $P(m)$ es V.

Entonces $\quad 169 \mid 3^{3m+3} - 26m - 27$

✓

Asamblea

Ejercicio 2 Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}.$$

Lo voy a probar por inducción.

•) $P(1)$ es V.

$$\sum_{i=1}^{1+1} \frac{1}{1+i} \leq \frac{5}{6} \iff \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} \leq \frac{5}{6}$$

$$\iff \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6} \quad V.$$

•) supongo que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

qvq $P(n+1)$ es verdadero.

Mi HI: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}$

quiero ver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+i} \leq \frac{5}{6}$. para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+i}$ $\rightsquigarrow$ cambio de índice.

$$1 \leq i \leq n+2$$

$$1+1 \leq i+1 \leq n+3$$

$$2 \leq i+1 \leq n+3$$

sea $j = i+1 \rightsquigarrow \boxed{j-1 = i} \rightarrow 2 \leq j \leq n+3$.

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+i} = \sum_{j=2}^{n+3} \frac{1}{n+j\cancel{-1}\cancel{+1}} = \sum_{j=2}^{n+3} \frac{1}{n+j}.$$

ahora:

$$\sum_{j=2}^{n+3} \frac{1}{n+j} = \sum_{j=1}^{n+3} \frac{1}{n+j} - \sum_{j=1}^{1} \frac{1}{n+j} =$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+j} + \sum_{n+2}^{n+3} \frac{1}{n+j} - \sum_{j=1}^{1} \frac{1}{n+j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{m+j} + \frac{1}{m+m+2} + \frac{1}{m+m+3} - \frac{1}{m+1}$$

Por HI se que $\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{m+j} \leq \frac{5}{6}$.

entonces

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{m+j} + \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3} - \frac{1}{m+1} \leq$$

$$\leq \frac{5}{6} + \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3} - \frac{1}{m+1}.$$

Ahora, para que $\frac{5}{6} + \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3} - \frac{1}{m+1} \leq \frac{5}{6}$.

Resta ver que.

$$\Rightarrow \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3} - \frac{1}{m+1} \leq 0.$$

~~saco~~ hago denominador común:

$$\frac{(2m+3)(m+1) + (2m+2)(m+1) - (2m+2)(2m+3)}{(2m+2)(2m+3)(m+1)} \leq 0.$$

como $\overset{>0}{(2m+2)}\ \overset{>0}{(2m+3)}\ \overset{>0}{(m+1)}$ es ~~pos~~ > 0

para que la división ~~asi~~ sea negativa el numerador debe ser negativo.

$$(2m+3)(m+1) + (2m+2)(m+1) - (2m+2)(2m+3) \leq 0$$

$$2m^2 + 3m + 3 + 2m^2 + 2m + 2 + 2m^2 + 2m - 4m^2 - 4m - 6m - 6 \leq 0.$$

agrupo m, m^2, constantes,

$$-m - 1 \leq 0.$$

$$-m \leq 1.$$

$$m \geq -1 \quad \rightarrow m \geq 1 \quad \text{por ser natural},$$

$$m \geq 1 > -1$$

Entonces para todo m natural $P(m+1) = \sum_{i=1}^{m+2} \frac{1}{m+1+i} \leq \frac{5}{6}$ es verdadera. Por inducción, $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{m+i} \leq \frac{5}{6}$ también lo es.

Asamblea

Ejercicios para $c \mid a \in \mathbb{Z}$ calcular

$(a^3 + 2a : 2a^4 + 6a^2 + 2)$.

el mcd divide a miembros $\rightarrow$.

$\begin{cases} d \mid a^3 + 2a & \rightarrow d \mid 2a^4 + 4a^2 \\ d \mid 2a^4 + 6a^2 + 2 & \end{cases} \Big\} \; d \mid 6a^2 - 4a^2 + 2 = 2a^2 + 2$

$\begin{cases} d \mid 2a^2 + 2 & \rightarrow d \mid 2a^3 + 2a \\ d \mid a^3 + 2a \rightarrow & d \mid 2a^3 + 4a \end{cases} \Big\} \; d \mid 4a - 2a = 2a$.

$\begin{matrix} d \mid 2a & \rightarrow d \mid 2a^2 \\ d \mid 2a^2 + 2 & \end{matrix} \Big\{ \; d \mid 2$

no $d \mid 1$ ~~¿por qué $d \mid a$?~~ ¿por qué d a 2?

Los divisores de 2 son 1 y 2 (positivos).

$d = 1$ ó $d = 2$.

Veamos cuando es 2 y cuando es 1.

$2a^4 + 6a^2 + 2 \equiv 0 \cdot a^4 + 0 \cdot a^2 + 0 \equiv 0 \; (2)$

$2 \mid 2a^4 + 6a^2 + 2$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Ahora hay que ver cuando $a^3 + 2a \equiv 0 \; (2)$.

Tabla de restos

a	0	1
$a^3 + 2a$	0	1

$a^3 + 2a \equiv 0 \; (2)$ cuando $a \equiv 0 \; (2)$, es decir cuando a es par.

$\begin{matrix} 2 \mid 2a^4 + 6a^2 + 2 \\ 2 \mid a^3 + 2a \end{matrix}$ si $a \equiv 0 \; (2)$.

Por lo tanto si $a \equiv 1 \; (2)$, $d = 1$. ya que si $a \not\equiv 0 \; (2) \Rightarrow a \equiv 1 \; (2)$. $\left(2 \nmid a^3 + 2a \text{ si } a \equiv 1 \; (2) \right)$

RTA $\begin{cases} d = 1 & \text{si } a \equiv 1 \; (2) \\ d = 2 & \text{si } a \equiv 0 \; (2) \end{cases}$

Ejercicio 3.

a) Como ya se cuantos piratas bajan en cada puerto, las distintas maneras ~~están~~ en que pueden desembarcar quedan determinadas por las maneras que elijo 4 piratas para bajar en Portobelo y por las maneras en que elijo cuatro para bajar en Maracaibo entre los que no desembarcaron en Portobelo. El resto de los piratas (los que no desembarcaron en ninguno de los dos puertos anteriores) sí o sí desembarcaron en el tercer puerto (Gibraltar) ya que el barco queda vacío.

entre los 13 piratas elijo 4 para bajar en Portobelo

$\hookrightarrow \binom{13}{4}$

entre los que no bajaron $(13-4=9)$, elijo cuatro para bajar en Maracaibo.

$\hookrightarrow \binom{9}{4}$

RTA: $\binom{13}{4}\binom{9}{4}$ ✓

b) Las maneras de desembarcar de 6 piratas en Portobelo son $\binom{13}{6}$ (las formas de elegir 6 personas entre 13).

Restan ver las formas de desembarcar del resto de los piratas (los que no se bajaron en Portobelo, es decir, $13-6=7$) en los dos puertos restantes pero sin que bajen todos en el mismo puerto. (ningún puerto quede vacío).

Los casos en que bajan todos en el mismo puerto son dos y son distintos, es decir, bajan todos en Maracaibo ó bajan todos en Gibraltar.

cuento la cantidad de formas de desembarcar de los 7 piratas sin considerar los dos casos en que se bajan todos en un puerto.

1 pirata baje en M y los 6 restantes en G $\binom{7}{1}$ → formas de elegir un pirata entre 7

2 piratas bajen en M y los 5 restantes en G $\binom{7}{2}$ → formas de elegir dos piratas entre 7.

3 piratas bajen en M y los 4 restantes en G : $\binom{7}{3}$ → formas de elegir 3 piratas entre 7.

4 " " " " y los 3 restantes en G $\binom{7}{4}$

5 " " " " y los 2 restantes en G $\binom{7}{5}$

6 " " " " y ~~nos~~ el restante en G $\binom{7}{6}$

$$= \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6}$$

$$= 2\left[\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3}\right]$$

RTA $\binom{13}{6} \cdot 2\left[\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3}\right]$

↳ maneras de bajen máximo 6 piratas en cada puerto.

↓ maneras de que bajen 6 de 13 piratas

Ejercicio 1.

b) $f \in A$, $f(i) = 1 \ \forall i \leq 7$ y $f(8) = 2$.

$$f \, R \, g \iff \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} g(i)$$

$$\sum_{i=1}^{8} f(i) \leq 1+1+1+1+1+1+1 \cancel{} + 2 = 9.$$

Yo además se que $f : \{1, 2, \ldots, 8\} \longrightarrow \{1, \ldots, 8\}$.

Por lo tanto, $f(i) \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, 8\}$

entonces $\sum_{i=0}^{8} f(i) \geq 8$

Por lo tanto: $8 \leq \sum_{i=0}^{8} f(i) \leq 9$

Tengo dos casos disjuntos (son disjuntos porque la suma no puede dar dos numeros distintos al mismo tiempo)

ⓐ $\sum_{i=1}^{8} f(i) = 8$ ó ⓑ $\sum_{i=1}^{8} f(i) = 9$.

ⓐ como $f(i) \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, 8\}$, la única opción

para que $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 8$.

es que $f(i) = 1 \quad \forall \; i \in \{1, \dots, 8\}$.

CASOS que cumplen ⓐ $\rightarrow$ 1 caso.

CASOS que cumplen ⓑ

Podemos pensarlo como:

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 9$

como ubicar 9 bolitas en 8 cajas con la restricción de que ninguna caja quede vacío $(0 \notin Im(f))$.

$9 - 8 = 1 \rightarrow$ pongo una bolita en cada caja y el problema se reduce a contar las maneras de ubicar una bolita en 8 cajas distintos.

$\binom{1+8-1}{8-1} = \binom{8}{7}$ funciones que cumplen ⓑ.

En total hay $\binom{8}{7} + 1 = 9$ funciones $f \in A / f R g$.

ejercicio 1 ⓐ

$f R g \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} g(i)$

determinar si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

Veamos si R es reflexiva (es decir, ¿$f R f$?).

$f R f \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} f(i)$ ✓.

en particular $\sum_{i=1}^{8} f(i) = \sum_{i=1}^{8} f(i)$.

R es Reflexiva

Veamos si R es simétrica:

$fRg \Rightarrow gRf$ $\quad \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} g(i)$ y $\sum_{i=1}^{8} g(i) \leq \sum_{i=1}^{8} f(i)$.

Esto ocurre solo si:

$$\sum_{i=1}^{8} f(i) = \sum_{i=1}^{8} g(i)$$

Sin embargo, esto no ocurre siempre, por ejemplo sea fRg y en particular

$$\sum_{i=1}^{8} f(i) < \sum_{i=1}^{8} g(i)$$

En este caso, fRg pero $g \not R f$. ya que

$$\sum_{i=0}^{8} f(i) \geq \sum_{i=1}^{8} g(i) \text{ y } \sum_{i=0}^{8} f(i) < \sum_{i=1}^{8} g(i) \quad \underline{\text{ABS}}!!.$$

R no es simétrica.

Veamos si es Antisimétrica:

fRg y $gRf \Leftrightarrow g = f$

$fRg \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} g(i)$

$gRf \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{8} g(i) \leq \sum_{i=1}^{8} f(i)$

Estas dos condiciones se cumplen simultaneamente cuando

$$\sum_{i=1}^{8} g(i) = \sum_{i=1}^{8} f(i)$$

Pero esto no quiere decir que $g(i) = f(i)$

Por ejemplo sea $g(i) = 2 \ \forall \ i \in \{1, \dots, 8\}$.

$$\sum_{i=1}^{8} g(i) = \sum_{i=1}^{8} 2 = 16.$$

Sea fRg y $gRf \Rightarrow 16 = \sum_{i=1}^{8} f(i)$

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=16$

Esto lo puedo pensar como las maneras de ubicar 16 bolillas en 8 cajas sin que ninguna quede vacía ($0 \notin Im(f)$)
(pero ninguna caja puede tener más de 8 bolillas)

~~distintas funciones f~~

Una función que cumple es:

$f(i) = 1 \ \forall \ 1 \leq i \leq 6$

$f(7) = f(8) = 5$

$1+1+1+1+1+1+5+5 = 16$ ✓.

y $g(i) \neq f(i)$.

R no es ~~simétrica~~ Antisimétrica.

Falta ver si R es transitiva.

fRg y $gRh \Rightarrow fRh$.

$fRg \iff \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} g(i)$.

$gRh \iff \sum_{i=1}^{8} g(i) \leq \sum_{i=1}^{8} h(i)$

Ambas condiciones se cumplen (fRg y gRh) si:

$\sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} g(i) \leq \sum_{i=1}^{8} h(i)$ por transitividad.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{8} f(i) \leq \sum_{i=1}^{8} h(i) \iff fRh$.

R es Transitiva

2 ✓