Probabilidad y Estadística (C) - Final - 20/12/2018

Examen Final. (20/12/18)

Criterio de aprobación: El examen consta de dos partes A y B. En la Parte A, cada ejercicio resuelto correctamente suma un punto. En la Parte B, el ejercicio suma 6 puntos. El final se aprueba con 6 puntos y NO podrá sumar más de 5 puntos de cada parte

Parte A

1. Un alumno está rindiendo un examen. La probabilidad de que sepa la respuesta de una pregunta es 0,8. De no saberla, la probabilidad de responder correctamente es de $\frac{1}{3}$

a) Calcular la probabilidad de responder correctamente una pregunta

b) Calcular la probabilidad de que el alumno supiera la respuesta viendo que respondió correctamente.

2. Dada la siguiente tabla de densidad conjunta:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.09	0.02	0.11	0.02
x_2	0.05	0.03	0.06	0.02
x_3				
x_4				

a) Calcular $P(X = x_2; Y = y_3)$

b) Calcular $P(X = x_1)$

c) Completar la tabla de modo que $P(X = x_3)$ sea siempre igual

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes, completar:

a) Si $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ldots$

b) Si $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ldots$

c) Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ldots$

d) Si $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \ldots$

4. Un alumno rinde un examen de 100 preguntas. La probabilidad de responder correctamente cada pregunta es de 0,65. El examen se aprueba con 60 preguntas correctas o más. Calcular de manera aproximada la probabilidad de aprobar.

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$

a) Halle $\widehat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ

b) Determine si el estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente. Justifique todas sus respuestas.

6. No lo copié

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$.

Para

$$H_0 = \{\mu = 5\} \qquad vs. \qquad H_1 = \{\mu > 5\}$$

se determinó un p-valor de 0,0606. ¿Rechazo con un $\alpha = 0{,}05$? Hallar el promedio muestral sabiendo que $n = 9$

Parte B

1. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números. Incluya previamente todas las definiciones y conceptos que considere pertinentes.

2. Proponga un ejercicio (escriba el enunciado) cuya resolución requiera invocar la Ley de los Grandes Números. No incluya la resolución del ejercicio.

Resolución:

1. Un alumno está rindiendo un examen. La probabilidad de que sepa la respuesta de la pregunta es 0,8. De no saberla, la probabilidad de responder correctamente es de $\frac{1}{3}$

Denomino S al evento de saber la respuesta.
Denomino C al evento de responder correctamente la pregunta.

Datos que tengo: $P(S) = 0{,}8 \quad P(C|S^c) = \frac{1}{3}$

a) $P(C) \overset{TPT}{=} P(C|S) \cdot P(S) + P(C|S^c) \cdot P(S^c) \rightarrow (TPT =$ Teorema de Probabilidad Total)

$$P(C) = 1 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}2 = \frac{13}{15}$$

$$P(S|C) \overset{Def}{=} \frac{P(S \cap C)}{P(C)} \overset{R.M.}{=} \frac{P(C|S) \cdot P(S)}{P(C)} = \frac{1 \cdot 0{,}8}{\frac{13}{15}} = \frac{12}{13} \rightarrow (R.M = \text{Regla Multiplicativa})$$

2) a) $P(X = x_2; Y = y_3) \overset{Tabla}{=} 0{,}06$

b) $P(X = x_1) = P(X = x_1; Y = y_1) + P(X = x_1; Y = y_2) + P(X = x_1; Y = y_3) + P(X = x_1; Y = y_4)$

$$P(X = x_1) = \quad 0{,}09 \quad + \quad 0{,}02 \quad + \quad 0{,}11 \quad + \quad 0{,}02 \quad = 0{,}24$$

c) Sé que $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1$

$$0{,}24 \quad + \; 0{,}16 \quad + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1 \; \big(P(X = x_2) \text{ lo calculé igual que en b}\big)$$

$$P(X = x_3) + P(X = x_4) = 0{,}6$$

$$\Rightarrow 0 \leq P(X = x_3) \leq 0{,}6$$

Voy a tomar $P(X = x_3) = 0{,}4$ y completaré la tabla de manera de cumplir con lo pedido.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.09	0.02	0.11	0.02
x_2	0.05	0.03	0.06	0.02
x_3	0.1	0.1	0.1	0.1
x_4				

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes, completar:

Para completar este ejercicio voy a utilizar que como $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes $\Rightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$

a) Si $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{B}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\Bigg)$

b) Si $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\Bigg)$

c) Si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{N}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} \mu_i, \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2\Bigg)$

d) $M_{\frac{\sum X_i}{\sqrt{k}}}(t) = M_{\sum X_i}\Bigg(\frac{t}{\sqrt{k}}\Bigg) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}\Bigg(\frac{t}{\sqrt{k}}\Bigg) = \prod_{i=1}^{k} e^{\frac{t_i^2}{2k}} = e^{\frac{1}{2k}\sum t_i^2} = e^{\frac{kt^2}{2k}} = e^{\frac{t^2}{2}} = M_z(t)\ \Bigg(z \sim \mathcal{N}(0{,}1)\Bigg)$

$\Rightarrow$ Si $X_i \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{N}(0{,}1)$

4) Defino la variable aleatoria $X_i =$ "Responder la i-ésima pregunta correctamente"

$X_i \sim \mathcal{B}(1, 0{,}65)$

$\overset{Ej3}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{B}(100, 0{,}65)$

Por comodidad llamaré $X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$

Me piden calcular $P(X_{100} \geq 60) = 1 - P(X_{100} < 60)$

$$1 - P(X_{100} < 60)$$
$$1 - P\Bigg(\frac{X_{100} - 100 \cdot 0{,}65}{\sqrt{100 \cdot 0{,}65(1 - 0{,}65)}} < \frac{60 - 100 \cdot 0{,}65}{\sqrt{100 \cdot 0{,}65(1 - 0{,}65)}}\Bigg)$$
$$1 - P\Bigg(\frac{X_{100} - 65}{\sqrt{22{,}75}} < \frac{-5}{\sqrt{22{,}75}}\Bigg)$$

$1 - P\Bigg(\dfrac{X_{100} - 65}{\sqrt{22{,}75}} < \dfrac{-5}{\sqrt{22{,}75}}\Bigg) \overset{TCL}{\approxeq} 1 - \Phi\Bigg(\dfrac{-5}{\sqrt{22{,}75}}\Bigg) \simeq 1 - \Phi(-1{,}04) \simeq \Phi(1{,}04) = 0{,}8508$

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con distribución $\mathcal{U}(0, \theta)$

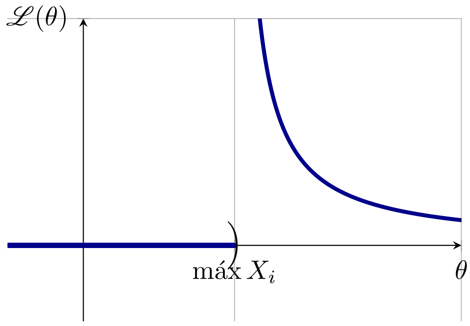
a) Halle $\widehat{\theta}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ

$\mathscr{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) = \dfrac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$

$$\mathbb{1} = \begin{cases} 1 & X_i \leq \theta \\ \\ 0 & cc \end{cases} \tag{1}$$

Que es equivalente

$$\mathbb{1} = \begin{cases} 1 & \max X_i \leq \theta \\ \\ 0 & cc \end{cases} \tag{2}$$



$\Rightarrow \boxed{\widehat{\theta}_n = \max X_i}$

b) Determine si el estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente.
Llamo $Y = \max X_i$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max X_i \leq y) = \Big[F_X(y)\Big]^n$

$f_Y(y) = n\Big[F_X(y)\Big]^{n-1} f_X(y)$

$f_Y(y) = n\Big[\int_0^y \frac{1}{\theta} dx\Big]^{n-1} \dfrac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(y) = n \cdot \dfrac{y^{n-1}}{\theta^{n-1}} \cdot \dfrac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(y) = n \cdot \dfrac{y^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(y)$

Calculo $\mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\ dy$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(y)\ dy$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^n\ dy$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{\theta^n}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n\theta}{n+1}$$

Ahora calculo $\mathbb{E}(Y^2)$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\ dy$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot n \cdot \frac{y^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(y)\ dy$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta y^{n+1}\ dy$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{n}{\theta^n}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$\widehat{\theta}_n$ es consistente $\iff ECM \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} 0$

ECM: $\Big[\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) - \theta\Big]^2 + \mathbb{V}(\widehat{\theta}_n) = \Big[\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) - \theta\Big]^2 + \mathbb{E}(\widehat{\theta}_n^2) - \big[\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n)\big]^2$

ECM: $\left[\frac{n\theta}{n+1}-\theta\right]^2+\frac{n\theta^2}{n+2}-\frac{(n\theta)^2}{(n+1)^2}=\left[\frac{\cancel{n}\theta}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}-\theta\right]^2+\frac{\cancel{n}\theta^2}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}-\frac{\cancel{n^2}\theta^2}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n})^2}$

Efectivamente $ECM \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

$\therefore \widehat{\theta}_n$ es consistente.

7. Sean $X_1,\ldots,X_n$ v.a. i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{N}(\mu,4)$.

Para

$$H_0=\{\mu=5\} \qquad vs. \qquad H_1=\{\mu>5\}$$

se determinó un p-valor de 0,0606. ¿Rechazo H_0 con un $\alpha=0{,}05$? Hallar el promedio muestral sabiendo que $n=9$

El p-valor es el mínimo valor con el que rechazo H_0 y dado que $0{,}05<0{,}0606 \Rightarrow$ no rechazo H_0.
Si p-valor $=0,0606 \overset{\Phi}{\Rightarrow} z_\alpha=1{,}55$

$\frac{(\overline{X}_n-\mu)\sqrt{n}}{\sqrt{4}}=1{,}55$

$\frac{(\overline{X}_9-5)\sqrt{9}}{2}=1{,}55$

$\overline{X}_9-5=\frac{31}{30}$

$\overline{X}_9=\frac{181}{30}\simeq 6{,}033$

Parte B

1. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números. Incluya previamente todas las definiciones y conceptos que considere pertinentes.

Desigualdad de Chebyshev. *Sea X una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}(X)=\mu$ y $\mathbb{V}(X)<+\infty$*

$$P(|X-\mu|>\varepsilon)\leq\frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\quad\forall\varepsilon>0$$

Ley de los Grandes Números. *Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias i.i.d. tal que $\mathbb{E}(X_i)=\mu$ y $\mathbb{V}(X_i)=\sigma^2<+\infty$*

$$\Rightarrow \overline{X}_n\overset{P}{\to}\mu\equiv P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

Demostración. $\mathbb{E}(\overline{X}_n)=\frac{1}{n}\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i)\underset{i.i.d.}{=}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\mathbb{E}(X_i)=\mu$

$\mathbb{V}(\overline{X}_n)=\frac{1}{n^2}\mathbb{V}(\sum_{i=1}^n X_i)\underset{i.i.d.}{=}\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}\mathbb{V}(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$

$P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)=P(|\overline{X}_n-\mathbb{E}(\overline{X}_n)|>\varepsilon)\overset{Chebyshev}{\leq}\frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\to 0$

$$0\overset{Axioma}{\leq}P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}0\leq\lim_{n\to+\infty}P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$0\leq\lim_{n\to+\infty}P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)\leq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}P(|\overline{X}_n-\mu|>\varepsilon)=0$$

□

2. Proponga un ejercicio (escriba el enunciado) cuya resolución requiera invocar la Ley de los Grandes Números. No incluya la resolución del ejercicio.

Ejercicio propuesto: Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con función de distribución exponencial de parámetro $\lambda = 2$. Indique el valor del siguiente límite en probabilidad:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i < 1\}} = \ldots$$