Álgebra 1

Primer cuatrimestre 2020

Primer parcial

Nombre y apellido:	....
Libreta universitaria:	....
Grupo:	G1 G2 G3 G4 G6

1. Pruebe que para todo entero $n \geq 0$ se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{2n}{3}$.

Solución. Para cada entero $n \geq 0$ sea $P(n)$ la afirmación de que la desigualdad del enunciado vale. Es claro que $P(0)$ vale, ya que cuando n es 0 las expresiones que aparecen a ambos lados del signo $\geq$ tienen valor 1. Supongamos entonces que $m \in \mathbb{N}_0$ y que la afirmación $P(m)$ vale, y mostremos que la afirmación $P(m+1)$ también vale. Observemos que

$$\sum_{k=1}^{3^{m+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{3^m} \frac{1}{k} + \sum_{k=3^m+1}^{3^{m+1}} \frac{1}{k}. \tag{1}$$

De acuerdo a la hipótesis inductiva $P(m)$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{3^m} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{2m}{3}. \tag{2}$$

Por otro lado, en la segunda suma del lado derecho de la igualdad (1) hay $3^{m+1} - 3^m$ términos y cada uno de ellos es mayor o igual que el último, $1/3^{m+1}$, así que esa suma es

$$\sum_{k=3^n+1}^{3^{m+1}} \frac{1}{k} \geq (3^{m+1} - 3^m)\frac{1}{3^{m+1}} = \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Usando (2) y (3) en (1), vemos que

$$\sum_{k=1}^{3^{m+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{2m}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2(m+1)}{3},$$

que es precisamente lo que afirma $P(m+1)$. □

Otra solución. Si $n \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{3^n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=3^l+1}^{3^{l+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{3^{l+1} - (3^l + 1) + 1}{3^{l+1}},$$

porque para cada $l \in \{0, \dots, n-1\}$ la suma $\sum_{k=3^l+1}^{3^{l+1}} \frac{1}{k}$ tiene $3^{l+1} - (3^l + 1) + 1$ términos, todos mayores o iguales que $1/3^{l+1}$, y esto es

$$= 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2}{3} = 1 + \frac{2n}{3},$$

como pide el ejercicio. □

2. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra FIBONACCI de manera tal que no haya dos letras C seguidas?

Solución. Ubicamos primero las dos letras C: hay $\binom{9}{2}$ formas de ponerlas en los 9 lugares disponibles, pero entre estas hay 8 en las que están una al lado de la otra, así que en total hay $\binom{9}{2} - 8 = 28$ formas de ponerlas como queremos. A las restantes 7 letras las podemos distribuir de $7!/2!$ formas distintas en los 7 lugares que sobraron, ya que hay dos entre ellas que son iguales. En definitiva, tenemos

$$28 \cdot \frac{7!}{2!} = 70\,560$$

formas de hacer lo pedido. □

Otra solución. Si ignoramos la condición de que las dos letras C no estén juntas, sabemos que hay $9!/2!2!$ formas de ordenar las letras de FIBONACCI, ya que hay 9 letras y dos pares de letras iguales. Por otro lado, y por una razón similar, hay $8!/2$ formas de ordenar las letras de FIBONAXI, y estas estan en biyección con las formas de ordenar las letras de FIBONACCI de manera que las dos letras C esténseguidas. Juntando todo, vemos que hay

$$\frac{9!}{2!2!} - \frac{8!}{2!} = 70\,560$$

formas de hacer lo pedido. □

Otra solución. Primero ordenamos las 7 letras FIBONAI de alguna de las $7!/2!$ formas en que es posible hacerlo y después de esod sitribuimos las dos letras C en los 8 lugares disponibles,

$$\_X\_X\_X\_X\_X\_X\_X\_,$$

lo que podemos hacer de $\binom{8}{2}$ formas. En definitiva, hay

$$\frac{7!}{2!} \cdot \binom{8}{2} = 70\,560$$

formas de hacerlo. □

3. Pruebe que si a y b son dos enteros tales que $(a : b) = 3$, entonces la expresión

$$(11a - 7b : 4a + 3b)$$

puede tomar exactamente dos valores. Encuéntrelos y muestre que efectivamente esos valores ocurren.

Solución. Sean a y b dos enteros tales que $(a : b) = 3$. Como 3 divide a a y a b, es claro que divide a $d \coloneqq (11a - 7b : 4a + 3b)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} d &= (11a - 7b : 4a + 3b) = (11a - 7b - 3(4a + 3b) : 4a + 3b) \\ &= (-a - 16b : 4a + 3b) = (-a - 16b : 4a + 3b + 4(-a - 16b)) \\ &= (-a - 16b : -61b) \end{aligned}$$

y, de manera similar,

$$\begin{aligned} d &= (11a - 7b : 4a + 3b) = (11a - 7b + 2(4a + 3b) : 4a + 3b) \\ &= (19a - b : 4a + 3b) = (19a - b : 4a + 3b + 3(19 - b)) \\ &= (19a - b : 61a). \end{aligned}$$

Vemos así que d divide a $61a$ y a $61b$, así que

$$d \mid (61a : 61b) = 61(a : b) = 61 \cdot 3.$$

Como ya sabemos que 3 divide a d, esto nos permite concluir que d es uno de los números 3 o $3 \cdot 61$. Notemos que si $a = b = 3$, entonces

$$d = (11 \cdot 3 - 7 \cdot 3 : 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3) = (12 : 21) = 3,$$

mientras que si $a = 135$ y $b = 3$, entonces

$$d = (11 \cdot 135 - 7 \cdot 3 : 7 \cdot 135 + 3 \cdot 3) = (1464 : 549) = 3 \cdot 61.$$

Esto nos dice que los dos valores que encontramos para d efectivamente ocurren. $\square$

4. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, \ldots, 10\}$ que son estrictamente crecientes.

(a) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{F}$?

(b) Pruebe que conjunto

$$R = \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : f(1) + f(5) = g(1) + g(5)\}$$

es una relación de equivalencia en $\mathcal{F}$.

(c) Considere la función

$$\begin{aligned} h : \{1, 2, 3, 4, 5\} &\longrightarrow \{1, 2, \ldots, 10\} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

que es un elemento del conjunto $\mathcal{F}$. ¿Cuántos elementos tiene la clase de equivalencia de h con respecto a la relación R de la parte (b)?

Solución. (a) Una función estrictamente creciente $\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,\dots,10\}$ queda completamente determinada por su imagen, que puede ser cualquiera de los subconjuntos de 5 elementos de $\{1,2,\dots,10\}$. Esto nos dice que $\#\mathcal{F} = \binom{10}{5}$.

(b) Mostremos que la relación R es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{F}$ probando que tiene cada una de las tres propiedades necesarias para ello.

- *Reflexividad.* Si $f \in \mathcal{F}$, entonces por supuesto $f(1) + fg(5) = f(1) + f(5)$, así que $f\ R\ f$.
- *Simetría.* Sean f y g dos elementos de $\mathcal{F}$ tales que $f\ R\ g$. Esto significa que $f(1)+f(5) = g(1)+g(5)$ y entonces, por supuesto, que también $g(1)+g(5) = f(1)+f(5)$, de manera que es $g\ R\ f$.
- *Transitividad.* Sean f, g y h elementos de $\mathcal{F}$ tales que $f\ R\ g$ y $g\ R\ h$. Esto significa que $f(1)+f(5) = g(1)+g(5)$ y $g(1)+g(5) = h(1)+h(5)$, así que $f(1)+f(5) = h(1)+h(5)$ y, por lo tanto, $f\ R\ h$.

(c) La clase de equivalencia de la función h del enunciado es el conjunto

$$C = \{f \in \mathcal{F} : f(1) + f(5) = h(1) + h(5)\}.$$

Tenemos entonces que determinar el número de funciones f de $\mathcal{F}$ tales que $f(1)+f(5) = 12$, esto es, la catidad de formas de completar la tabla

x	$f(x)$
1	
2	
3	
4	
5	

¿Qué opciones tenemos para elegir $f(1)$ y $f(5)$? Tienen que ser dos elementos de $\{1,2,\dots,10\}$ tales que $f(1) < f(5)$, ya que la función f tiene que ser estrictamente creciente, y $f(1)+f(5) = 12$. Las opciones son, entonces, las siguientes:

$f(1)$	2	3	4	5
$f(5)$	10	9	8	7

Para completar la tabla de la función tenemos que decidir los valores de $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$, que tienen que ser tres elementos de $\{1,2,\dots,10\}$ en orden creciente y estrictamente entre $f(1)$ y $f(5)$. ¿De cuántas formas podemos hacer esto? Depende de cuál haya sido la elección de $f(1)$ y $f(5)$:

- Si $f(1) = 2$ y $f(5) = 10$, a $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$ los podemos elegir en el conjunto $\{3,4,\dots,9\}$: hay $\binom{7}{3}$ formas de elegirlos.
- Si $f(1) = 3$ y $f(5) = 9$, a $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$ los podemos elegir en el conjunto $\{4,5,\dots,8\}$: hay $\binom{5}{3}$ formas de elegirlos.
- Si $f(1) = 4$ y $f(5) = 8$, a $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$ los podemos elegir en el conjunto $\{5,6,7\}$: hay una sola forma de elegirlos.
- Finalmente, si $f(1) = 5$ y $f(5) = 7$, entonces a $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$ los podemos elegir en el conjunto $\{6\}$: por supuesto, no hay ninguna forma de hacer esto.

Juntando todo, vemos que la clase de equivalencia de h tiene

$$\binom{7}{3} + \binom{5}{3} + 1 + 0 = 46$$

elementos. $\square$

5. Sabiendo que el resto de la división de a por 12 es 7, calcular el resto de la división de $5a^2 + 38$ por 40.

Solución. Como el resto de la división de a por 12 es 7, sabemos que existe un entero q tal que $a = 12q + 7$ y entonces

$$5a^2 + 38 = 5(12q + 7)^2 + 38 = 5 \cdot 12^2 \cdot q^2 + 5 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 7 \cdot q + 5 \cdot 7^2 + 38$$

Como $5 \cdot 12^2$ y $5 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 7$ son divisibles por 40, vemos que

$$5a^2 + 38 \equiv 5 \cdot 7^2 + 38 = 283 \equiv 3 \mod 40$$

y, por lo tanto, que el resto de dividir a $5a^2 + 38$ por 40 es 3. $\square$

Otra solución. Como $a \equiv 7 \mod 12$, tenemos que $a \equiv 7 \equiv 3 \mod 4$ y, por lo tanto, que $4 \mid a - 3$. Como a es impar, $2 \mid a + 3$ y entonces $4 \cdot 2 \mid (a-3)(a+3) = a^2 - 3^2$, es decir, $a^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \mod 2^3$. Usando esto, vemos que $5a^2 + 38 \equiv 5 \cdot 1 + 38 \equiv 3 \mod 2^3$. Por otro lado es claro que $5a^2 + 38 \equiv 3 \mod 5$. Así, $(5a^2 + 38) - 3$ es divisible por 2^3 y por 5 y, como estos dos números son coprimos, por $2^3 \cdot 5 = 40$. Esto nos dice que $5a^2 + 38 \equiv 3 \mod 40$, de manera que el resto de dividir a $5a^2 + 38$ por 40 es 3. $\square$

Justifique todas sus respuestas