Promociona (9)

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Primer recuperatorio del 2do Parcial (4/12/2023) - 2do. cuatrimetre 2023

TEMA 1

1 (2,5 pts.)	2 (2,5 pts.)	3 (2,5 pts.)	4 (2,5 pts.)	Nota
B B	X	B B	B	7^{50} (solo 59/100)

Apellido: MAZZEI Nro. de libreta: [redacted] Nro de práctica: 24

Nombre: AGUSTÍN IGNACIO Carrera: Lic. Ciencia Datos

1. Sea $f(x,y) = (x-1)\cos(y) - y\cos(x-1)$.

   a) Calcular su poliomio de Taylor de orden 2 centrado en $(1,0)$.

   b) Analizar el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)\cos(y) - y\cos(x-1) - x + 1 + y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

2. Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^3 - y^2$ en la región

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1,\, y \leq \frac{1}{2}x\right\}.$$

3. a) Calcular, si es posible, el valor de la integral impropia

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\, dx.$$

   b) Calcular el volumen del solido comprendido entre $z = x^2 + y^2 - 2$ y $z = \sqrt{x^2+y^2} - 2$.

4. Calcular

$$\int\int\int_W (x^2+y^2+z^2)dV,$$

donde W es la región del primer octante limitada superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ e inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Escribir todos los razonamientos que justifican las respuestas.

1] Sea $f(x,y) = (x-1)\cos(y) - y\cos(x-1)$

a) Calcular Taylor de orden 2 en $(1,0)$

• Si llamo $T_2(x,y)$ al polinomio de Taylor de $f(x,y)$ en $(1,0)$ entonces, su expresión es:

$$T_2(x,y) = f(1,0) + \nabla f(1,0)\,[x-1,y]^T + [x-1,y]\begin{bmatrix} f''_{xx}(1,0) & f''_{xy}(1,0) \\ f''_{yx}(1,0) & f''_{yy}(1,0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}$$

Luego, hago los cálculos necesarios:

• $f(1,0) = 0$, • $f'_x = \cos(y) + y\,\text{sen}(x-1)$

• $f'_y = -x\,\text{sen}(y) + \text{sen}(y) - \cos(x-1)$

• $f''_{xx} = y\cos(x-1)$, $f''_{yy} = -x\cos(y) + \cos(y)$

• $f''_{xy} = -\text{sen}(y) + \text{sen}(x-1)$

Y evaluando en $(1,0)$: • $f'_x = 1$, $f'_y = -1$ • $f''_{xx} = 0$, $f''_{yy} = 0$ $\quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0$. $\quad$ $f \in C^\infty$.

Entonces, $T_2(x,y) = 0 + [1\ -1]\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} + [x-1, y]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}$

$= x - 1 - y = T_2(x,y)$.

B

b) Debo analizar la existencia del sig. límite:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)\cos(y) - y\cos(x-1) - x + 1 + y}{(x-1)^2 + y^2}$$

Y considerando que $(x-1)\cos(y) - y\cos(x-1)$ es $f(x,y)$ ~~y que además conozco su Pol. de Taylor del 1) a) y que es de orden 2 en (1,0) y este es el único Pol. que cumple que el~~ $\cancel{\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{\|(x-1,y)\|^2}}$

SIGUE ATRÁS

Puede reescribir el límite como: $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{F(x,y)-x+1+y}{\|(x-1,y)\|^2}$

y $T_2(x,y)$ es tal que: $F(x,y) = T_2(x,y) + R(x,y)$
donde $R(x,y)$ es el error cometido por $T_2(x,y)$ al aproximar $F(x,y)$ y cumple por def: $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{R(x,y)}{\|(x-1,y)\|^2} = 0$

Luego $\dfrac{F(x,y)-x+1+y}{\|(x-1,y)\|^2} = \dfrac{F(x,y)-T_2(x,y)}{\|(x-1,y)\|^2} = \dfrac{R(x,y)}{\|(x-1,y)\|^2}$

y $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{R(x,y)}{\|(x-1,y)\|^2} = 0$.

Entonces el límite original existe y vale 0.

B

MAZZEI AGUSTÍN IGNACIO

3) a) Calcular si es posible: $\int_{-1}^{0} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\, dx$

En $x=0$ no esta def. el cociente, luego debo considerar un $a<0$ y ver qué sucede con:

$\lim_{a\to 0} \int_{-1}^{a} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\, dx$ } Es decir, ver si la integral converge en el dirécto $[-1,0)$

Haciendo un cambio de variables $u = e^{2x}-1$ y con $du = 2e^{2x}\,dx$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{a} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(-1)}^{u(a)} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\,Log(|u|)$$

Volviendo a la variable original resulta que

$$\int_{-1}^{a} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(|e^{2x}-1|)\Big|_{-1}^{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log(|e^{2a}-1|) - \underbrace{\frac{1}{2}\log(|e^{-2}-1|)}_{\in\mathbb{R} \text{ y no depende de } x}$$

$\Rightarrow \lim_{a\to 0} \int_{-1}^{a} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \lim_{a\to 0}$ ~~[illegible]~~ $Log(|e^{2a}-1|)\cdot\frac{1}{2}$

y este límite no existe pues $log(|e^{2a}-1|)$ diverge para valores tendiendo a 0.

Luego la integral impropia diverge.

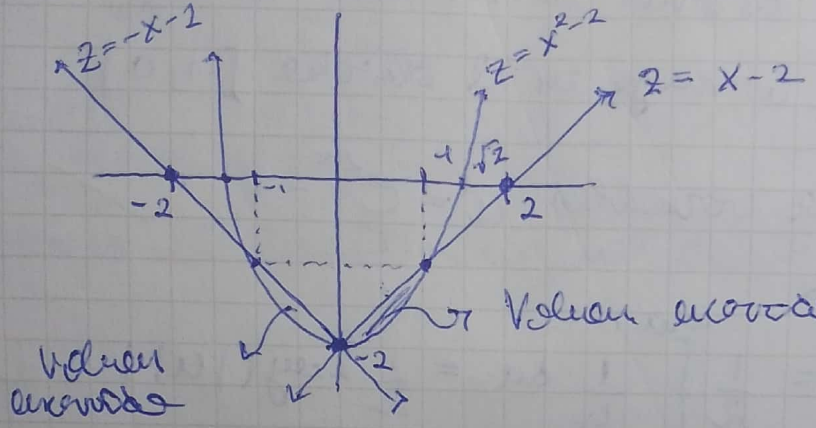
B

3) b) Volumen comprendido entre $\begin{cases} z = x^2+y^2-2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} - 2 \end{cases}$

Veo qué sucede si $y=0$:

$$\begin{cases} z = x^2-2 \\ z = |x|-2 \Rightarrow z=-x-2 \text{ ó } z = x-2 \end{cases}$$

Si grafico esos 2 proyecciones sobre el plano xz:



Es decir, $x^2+y^2-2 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}-2$

y si considero que $x^2+y^2=R^2$ y $\sqrt{x^2+y^2}=R$

La intersección entre ambas superficies será cuando

$R^2-2 = R-2 \iff R=0 \vee R=1$

Descarto $R=0$ pues es el punto trivial y $R>0$.

De manera que puedo describir el volumen con

$x = R\cos(\theta)$ y $R^2-2 \leq z \leq R-2$, $R\in[0,1]$
$y = R\,\text{sen}(\theta)$ $\theta\in[0,2\pi)$

El volumen será: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{R^2-2}^{R-2} R\, dz\, dR\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 R\left[z \Big|_{R^2-2}^{R-2} \right] dR\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 R(R-\cancel{2}-R^2+\cancel{2})\, dR\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 R^2-R^3\, dR\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4} \Big|_0^1 \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\, d\theta$

$= \frac{1}{12}\left[\theta \Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{12}_6} = \frac{\pi}{6}$ = Volumen entre superficies.

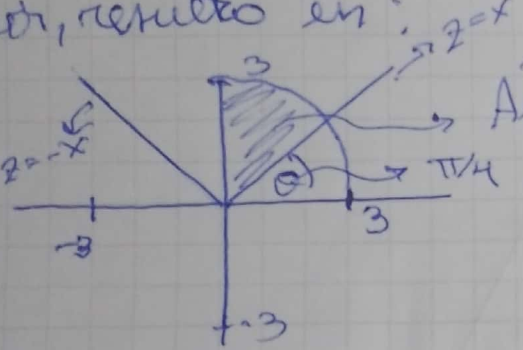
B

4) Calcular $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dV$

si W está en el primer octante limitada superiormente por $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

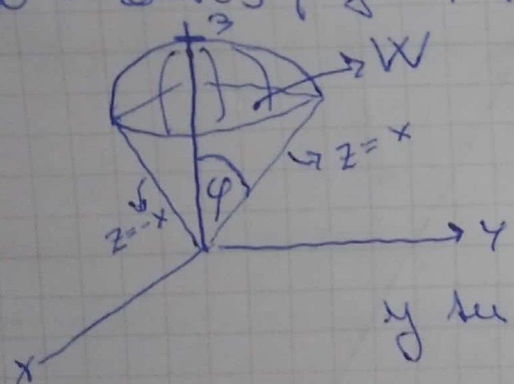
Estudio que pasa con $y=0$: $\begin{cases} z=|x| \\ x^2+z^2=4 \end{cases}$

Es decir, resulta en:



Área encerrada considerando que estoy en el primer octante.

Como ambas figuras son simétricas en $\mathbb{R}^3$ se verá:



y si uso coordenadas esféricas puedo describir la región con:

$0 \le \varphi \le \pi/4$ $\quad 0 \le \rho \le 3$

$0 \le \theta \le \pi/2$

con: $x=\cos(\theta)\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$, $y=\mathrm{sen}(\theta)\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$, $z=\cos(\varphi)\rho$

y su jacobiano será $\rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)$

Luego $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2\cdot\rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}(\varphi)\left[\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3\right] d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \frac{243}{5}\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi\,d\theta$

$= \frac{243}{5}\int_0^{\pi/2}\left[-\cos(\varphi)\Big|_0^{\pi/4}\right] d\theta = \frac{243}{5}\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) d\theta$

$= \frac{243}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{\pi}{2} \cong \underline{22.35}$

B